



Dofinansowane przez
Unię Europejską

PROPER

PROBABILITY AROUND US

PROBABILITY FOR EVERYONE

Scenariusze lekcji

GRAFY

STOCHASTYCZNE

(CZ)



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE





Co-funded by
the European Union



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE



Gymnázium Pierra de Coubertina

Tábor, Náměstí Františka Křížíka 860

Příprava na vyučovací hodinu

Předmět: Pravděpodobnost kolem nás

Vyučující: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Mgr. Eva Novotná

Třída: 4. ročník – výběrový seminář

Číslo hodiny: 1 (45 minut)

Téma: Základní pojmy počtu pravděpodobnosti

Výukový cíl: Žáci se seznámí se základními pojmy v matematice náhody

Časový projekt vyučovací hodiny:

Úvod – seznámení tématem hodiny

Hlavní část – výklad látky, komunikace s žáky, třídění informací

Závěr – opakování nových znalostí, dotazy žáků

Práce s učivem: zavedení pojmu pravděpodobnost jevu, příklady z reálného života, matematizace pojmu náhoda

Prostředky a cesty: Frontální výuka s vloženou prezentací. Skupinová práce sloužící k ucelení a zopakování informací.

Pomůcky: Studijní materiál, prezentace, kostky, karty, další simulační pomůcky

Činnost učitele v průběhu vyučovací hodiny: Výklad učiva, vysvětlení pojmů, motivace žáků, vedení k samostatnosti a tvořivosti žáků

Činnost žáka v průběhu vyučovací hodiny: Zájem o téma vyučovací hodiny, udržení pozornosti, kladení otázek, spolupráce s učitelem, spolupráce se spolužáky

Organizace vyučovací hodiny: Hromadné vyučování s prvky individuálního i skupinového vyučování

Klíčový pojem: „pravděpodobnostní prostor“

Náhodný pokus \times matematický model (**pravděpodobnostní prostor**)

- 1 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots\}$ (konenečná \times nekonečná množina)
- 2 Nezáporná funkce p : $p(\omega_1) + p(\omega_2) + p(\omega_3) + \dots = 1$.

Dvojice (Ω, p) je *pravděpodobnostní prostor*.

Definice:

Jevem A v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) rozumíme každou podmnožinu množiny Ω . *Pravděpodobností jevu* A nazveme číslo $P(A)$ definované předpisem

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{když } A = \emptyset, \\ p(\omega_{j_1}) + \dots + p(\omega_{j_k}), & \text{když } A = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_k}\}, \\ p(\omega_{j_1}) + p(\omega_{j_2}) + p(\omega_{j_3}) \dots, & \text{když } A = \{\omega_{j_1}, \omega_{j_2}, \omega_{j_3} \dots\}. \end{cases}$$

Funkce p se nazývá *rozdělení pravděpodobnosti na množině* Ω , funkci P nazýváme *pravděpodobnost*.



Co-funded by
the European Union



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE



Gymnázium Pierra de Coubertina

Tábor, Náměstí Františka Křížíka 860

Příprava na vyučovací hodinu

Předmět: Pravděpodobnost kolem nás

Vyučující: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Mgr. Eva Novotná

Třída: 4. ročník – výběrový seminář

Číslo hodiny: 2 (45 minut)

Téma: Vlastnosti pravděpodobnostních prostorů

Výukový cíl: Žáci se seznámí se modely pravděpodobnostních prostorů

Časový projekt vyučovací hodiny:

Úvod – seznámení tématem hodiny

Hlavní část – výklad látky, komunikace s žáky, třídění informací

Závěr – opakování nových znalostí, dotazy žáků

Práce s učivem: ukázky pravděpodobnostních prostorů z reálného života, zkoumání jejich vlastností

Prostředky a cesty: Frontální výuka s vloženou prezentací. Skupinová práce sloužící k ucelení a zopakování informací.

Pomůcky: Studijní materiál, prezentace, kostky, karty, další simulační pomůcky

Činnost učitele v průběhu vyučovací hodiny: Výklad učiva, vysvětlení pojmů, motivace žáků, vedení k samostatnosti a tvořivosti žáků

Činnost žáka v průběhu vyučovací hodiny: Zájem o téma vyučovací hodiny, udržení pozornosti, kladení otázek, spolupráce s učitelem, spolupráce se spolužáky

Organizace vyučovací hodiny: Hromadné vyučování s prvky individuálního i skupinového vyučování

Klíčový pojem: příklady pravděpodobnostních prostorů (ukázka)

Pravděpodobnostní prostor

2. příklad

Jaká je pravděpodobnost, že při hodu dvěma kostkami bude součet padnutých teček dělitelný 3?

Řešení: 1. Najdeme (Ω, p) .

11	12	13	14	15	16
21	22	23	24	25	26
31	32	33	34	35	36
41	42	43	44	45	46
51	52	53	54	55	56
61	62	63	64	65	66

$$P = \frac{12}{36} = \frac{1}{3}$$

2. Hledáme příznivé výsledky





Co-funded by
the European Union



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE



Gymnázium Pierra de Coubertina

Tábor, Náměstí Františka Křížíka 860

Příprava na vyučovací hodinu

Předmět: Pravděpodobnost kolem nás

Vyučující: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Mgr. Eva Novotná

Třída: 4. ročník – výběrový seminář

Číslo hodiny: 3 (45 minut)

Téma: Nezávislost náhodných jevů

Výukový cíl: Žáci se seznámí s pojmem nezávislosti náhodných jevů

Časový projekt vyučovací hodiny:

Úvod – seznámení tématem hodiny

Hlavní část – výklad látky, komunikace s žáky, třídění informací

Závěr – opakování nových znalostí, dotazy žáků

Práce s učivem: problematika nezávislosti náhodných jevů a její správné pochopení, nezávislost po dvojicích \times totální (skupinová) nezávislost jevů, zkoumání jejich vlastností

Prostředky a cesty: Frontální výuka s vloženou prezentací. Skupinová práce sloužící k ucelení a zopakování informací.

Pomůcky: Studijní materiál, prezentace, kostky, karty, další simulační pomůcky

Činnost učitele v průběhu vyučovací hodiny: Výklad učiva, vysvětlení pojmů, motivace žáků, vedení k samostatnosti a tvořivosti žáků

Činnost žáka v průběhu vyučovací hodiny: Zájem o téma vyučovací hodiny, udržení pozornosti, kladení otázek, spolupráce s učitelem, spolupráce se spolužáky

Organizace vyučovací hodiny: Hromadné vyučování s prvky individuálního i skupinového vyučování

Klíčový pojem: nezávislost náhodných jevů (ukázka)

Nezávislost jevů - $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

5. Příklad: Hod dvěma mincemi (5 Kč a 10 Kč)

Sledujme jevy

- $A_1 = \{\text{na 5 Kč padne rub} - R\}$,
- $A_2 = \{\text{na 10 Kč padne líc} - L\}$,
- $A_3 = \{\text{na obou mincích padne stejný znak} - RR, LL\}$.

Ověřte nezávislost jevů A_1, A_3 .

$$\Omega = \{RR, RL, LR, LL\}$$

$$P(A_1) = P(R) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P(A_3) = P(RR, LL) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$



Co-funded by
the European Union



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE



Gymnázium Pierra de Coubertina

Tábor, Náměstí Františka Křížíka 860

Příprava na vyučovací hodinu

Předmět: Pravděpodobnost kolem nás

Vyučující: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Mgr. Eva Novotná

Třída: 4. ročník – výběrový seminář

Číslo hodiny: 4 (45 minut)

Téma: neslučitelnost jevů

Výukový cíl: Žáci se seznámí s pojmem neslučitelnosti náhodných jevů

Časový projekt vyučovací hodiny:

Úvod – seznámení tématem hodiny

Hlavní část – výklad látky, komunikace s žáky, třídění informací

Závěr – opakování nových znalostí, dotazy žáků

Práce s učivem: problematika neslučitelnost náhodných jevů a její správné pochopení, zkoumání jejich vlastností

Prostředky a cesty: Frontální výuka s vloženou prezentací. Skupinová práce sloužící k ucelení a zopakování informací.

Pomůcky: Studijní materiál, prezentace, kostky, karty, další simulační pomůcky

Činnost učitele v průběhu vyučovací hodiny: Výklad učiva, vysvětlení pojmů, motivace žáků, vedení k samostatnosti a tvořivosti žáků

Činnost žáka v průběhu vyučovací hodiny: Zájem o téma vyučovací hodiny, udržení pozornosti, kladení otázek, spolupráce s učitelem, spolupráce se spolužáky

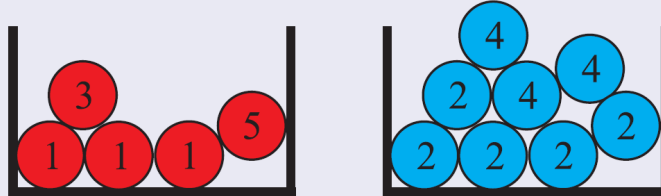
Organizace vyučovací hodiny: Hromadné vyučování s prvky individuálního i skupinového vyučování

Klíčový pojem: neslučitelnost náhodných jevů (ukázka)

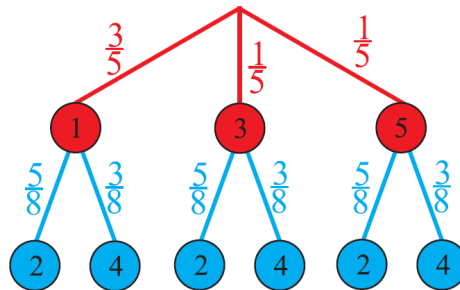
Neslučitelnost × nezávislost jevů

9. příklad

Hráč A vylosuje kouli z červené urny, *hráč B* z modré. Zvítězí ten, kdo vylosuje větší číslo. Který z hráčů má větší šanci na výhru?



Řešení: $\Omega = \{12, 14, 32, 34, 52, 54\}$.





Co-funded by
the European Union



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE



Gymnázium Pierra de Coubertina

Tábor, Náměstí Františka Křížíka 860

Příprava na vyučovací hodinu

Předmět: Pravděpodobnost kolem nás

Vyučující: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Mgr. Eva Novotná

Třída: 4. ročník – výběrový seminář

Číslo hodiny: 5 (45 minut)

Téma: Podmíněná pravděpodobnost náhodných jevů

Výukový cíl: Žáci se seznámí s pojmem podmíněné pravděpodobnosti náhodných jevů

Časový projekt vyučovací hodiny:

Úvod – seznámení tématem hodiny

Hlavní část – výklad látky, komunikace s žáky, třídění informací

Závěr – opakování nových znalostí, dotazy žáků

Práce s učivem: problematika podmíněné pravděpodobnosti náhodných jevů a její správné pochopení, vztah podmíněné pravděpodobnosti a nezávislosti náhodných jevů, příklady

Prostředky a cesty: Frontální výuka s vloženou prezentací. Skupinová práce sloužící k ucelení a zopakování informací.

Pomůcky: Studijní materiál, prezentace, kostky, karty, další simulační pomůcky

Činnost učitele v průběhu vyučovací hodiny: Výklad učiva, vysvětlení pojmů, motivace žáků, vedení k samostatnosti a tvořivosti žáků

Činnost žáka v průběhu vyučovací hodiny: Zájem o téma vyučovací hodiny, udržení pozornosti, kladení otázek, spolupráce s učitelem, spolupráce se spolužáky

Organizace vyučovací hodiny: Hromadné vyučování s prvky individuálního i skupinového vyučování

Klíčový pojem: podmíněná pravděpodobnost (ukázka)

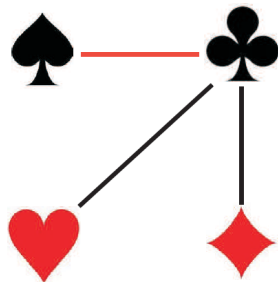
Podmíněná pravděpodobnost $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$

Příklad 8: 4 karty - ♣ ♦ ♥ ♠

Po zamíchání vyložím dvě z nich na stůl. Určete pravděpodobnost, že

- A) obě vyložené karty budou černé,
- B) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je černá karta,
- C) obě vyložené karty budou černé, když víte, že mezi vylosovanými kartami je ♣.

Řešení: C)





Co-funded by
the European Union



PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE



Gymnázium Pierra de Coubertina

Tábor, Náměstí Františka Křížíka 860

Příprava na vyučovací hodinu

Předmět: Pravděpodobnost kolem nás

Vyučující: prof. RNDr. Pavel Tlustý, CSc., Mgr. Eva Novotná

Třída: 4. ročník – výběrový seminář

Číslo hodiny: 6 (45 minut)

Téma: Stochastické grafy - úvod

Výukový cíl: Žáci se seznámí s pojmem stochastického grafu a jeho využití k modelování reálných problémů z počtu pravděpodobnosti

Časový projekt vyučovací hodiny:

Úvod – seznámení tématem hodiny

Hlavní část – výklad látky, komunikace s žáky, třídění informací

Závěr – opakování nových znalostí, dotazy žáků

Práce s učivem: problematika tvorby stochastického grafu jako nástroje řešení pravděpodobnostních úloh, příklady

Prostředky a cesty: Frontální výuka s vloženou prezentací. Skupinová práce sloužící k ucelení a zopakování informací.

Pomůcky: Studijní materiál, prezentace, kostky, karty, další simulační pomůcky

Činnost učitele v průběhu vyučovací hodiny: Výklad učiva, vysvětlení pojmů, motivace žáků, vedení k samostatnosti a tvořivosti žáků

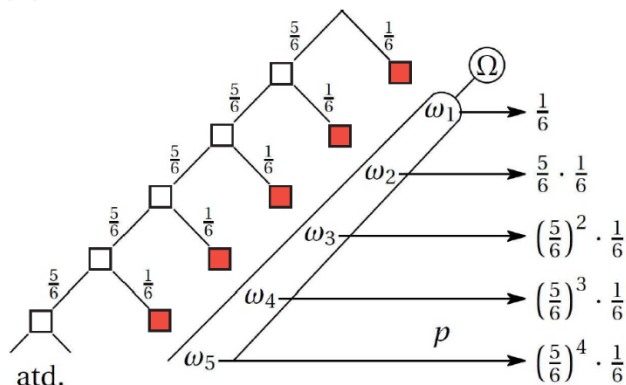
Činnost žáka v průběhu vyučovací hodiny: Zájem o téma vyučovací hodiny, udržení pozornosti, kladení otázek, spolupráce s učitelem, spolupráce se spolužáky

Organizace vyučovací hodiny: Hromadné vyučování s prvky individuálního i skupinového vyučování

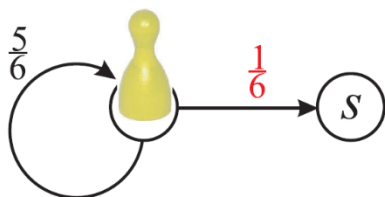
Klíčový pojem: stochastický graf (ukázka)

Nekonečný (diskrétní) pravděpodobnostní prostor

Stochastický strom:



$$\frac{1}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} + \left(\frac{5}{6}\right)^3 \cdot \frac{1}{6} + \dots = x \quad ???$$



$$x = \frac{1}{6} + \frac{5}{6}x$$