Dofinansowane przez Unię Europejską

PROPER

PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Materiały do przygotowania scenariuszy lekcji

GRAFY STOCHASTYCZNE (PL)

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by
the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Materiały do przygotowania scenariuszy lekcji

Grafy stochastyczne

Ireneusz Krech, Pavel Tlustý

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by
the European Union

1 Wprowadzenie

1.1 Rachunek prawdopodobieństwa a intuicja

Badanie i odkrycie matematyczne jest nie tylko rezultatem czystej dedukcji, myślenia indukcyjnego i myślenia przez analogie, ale także myślenia intuicyjnego (zob. [52]). Formalnemu ujęciu matematyki przeciwstawia się ujęcie intuicyjne. Abstrakcję i schematyzm w nauczaniu matematyki przeciwstawia się „widzeniu", „postrzeganiu" ogólnych, istotnie ważnych konstrukcji matematycznych oraz stosunków ilościowych i przestrzennych. Inspiracją i początkiem wszelkich odkryć oraz punktem dostarczającym pewności w rozumowaniu każdego typu, autorem pomysłów, stwierdzeń czy hipotez jest „oczywistość", „zdrowy rozsądek", czyli intuicja.

Freudenthal przez długi czas zastępował słowo "intuicja" sformułowaniem „kształtowanie się matematycznych obiektów" (zob. [12]). Czynił tak ze względu na różnorodność znaczenia słowa „intuicja" w różnych językach. Freudenthal pisał też (zob. [13]), że „intuicje bez pojęć są puste, pojęcia bez intuicji są ślepe".

Intuicje stochastyczne to zdolność dochodzenia do pewnych sądów i przekonań o charakterze probabilistycznym i statystycznym bez świadomego wnioskowania, a nawet bez uświadamiania sobie przesłanek uzasadniających to przekonanie czy sąd. Jest to zdolność lub proces poznawczy, polegający na trafnej ocenie probabilistycznych charakterystyk próbki (prawdopodobieństwo zdarzenia, wartość oczekiwana, rozkład, stochastyczna niezależność) bądź populacji na podstawie (niepełnych) informacji o próbce, niepoparty w pełni świadomym rozumowaniem i uzasadnieniem, uwarunkowany posiadaną wiedzą i doświadczeniem.

Wnioski natury intuicyjnej są wnioskami, które wydają nam się oczywiste, które formułujemy natychmiast, prawie bez głębszego zastanowienia, z pominięciem dedukcji i rozumowań, rachunków i argumentacji, a na podstawie zachowanych w pamięci obrazów, schematów i modeli spotykanych uprzednio sytuacji. Myślenie intuicyjne jest myśleniem o abstrakcyjnej sytuacji za pośrednictwem jej konkretnego modelu (por. [38]).

W [56], [57] i [58] przytoczone są badania psychologów A. Tversky'ego i D. Kahnemana, z których wynika, że ludzie nie posiadają właściwie wykształconych intuicji probabilistycznych. W drodze ewolucji człowiek nie został wyposażony w nawet podstawowe intuicje probabilistyczne.

Błędne intuicje stochastyczne mogą mieć podłoże matematyczne, mogą bowiem wynikać z braku elementarnej wiedzy probabilistycznej, statystycznej czy kombinatorycznej, ale także z jej niewłaściwego przyswojenia (sformalizowany wykład wcale nie niweluje błędów w ocenach intuicyjnych). Błędne intuicje mogą mieć także podłoże psychologiczne i wyjaśnienie formalne reguł rachunku prawdopodobieństwa i statystyki nie wystarcza do usunięcia tych „błędnych wyobrażeń" w procesie przewidywania probabilistycznego, które psychologia traktuje jako ważny psychologiczny proces przeddecyzyjny. Z badań psychologów wynika, że w owym procesie przewidywania ludzie nie tyle wykorzystują tezy probabilistyczne, ile raczej stosują pewne zasady, reguły, pewne strategie.

Tversky i Kahneman badali podłoże błędnych wyobrażeń (błędnych intuicji) w sytuacjach dotyczących ocen prawdopodobieństwa. Wskazują oni na rozbieżności pomiędzy subiektywnym prawdopodobieństwem (tj. oceną prawdopodobieństwa podaną przez człowieka, jako jego oceną szansy zdarzenia) a prawdopodobieństwem obiektywnym, normatywnym, tj. wynikającym z modelu probabilistycznego. Badania prowadzone były w ramach ich dociekań nad problemami nauczania matematyki. Badano zachowanie się osób w rożnym wieku i rożnych profesji przy atakowaniu specyficznych zagadnień stochastycznych (a w istocie kombinatorycznych).

Z badań J. M. Shaughenessy wynika, jak ogromną rolę w rozwoju właściwych intuicji stochastycznych ujawniających się w prawidłowym stosowaniu strategii heurystycznych ma osobisty kontakt człowieka z empirią (losowanie i opracowywanie danych statystycznych, korzystanie z gotowych danych, na przykład wyników gier liczbowych, wyznaczanie częstości, konfrontacja ocen a posteriori z ocenami a priori). Badania, o których tu mowa, potwierdzają, że nauczanie rachunku prawdopodobieństwa zbyt sformalizowane, odizolowane od statystyki matematycznej, pomijające aspekt empiryczny pojęć probabilistycznych, pomijające także pewne klasyczne paradoksy, tj. zadania-stochastyczne niespodzianki, nie usuwa błędnych intuicji. Kahneman i Tversky podkreślają z naciskiem, że te same błędy popełniają uczniowie „naiwni stochastycznie" (tj. bez elementarnej wiedzy stochastycznej), jak i dorośli, mający nawet za sobą kurs zaawansowanego, ale sformalizowanego rachunku prawdopodobieństwa. Stwierdzają pomyłki tego typu nawet wśród psychologów o pewnej wiedzy stochastycznej.

1.2 Czynnościowe nauczanie matematyki

Koncepcja czynnościowa jest podstawową strategią poprawnego dydaktycznie procesu nauczania-uczenia się matematyki, ale może być łatwo również zinterpretowana jako

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

podstawowa strategia odkrywania i tworzenia matematyki przez uczniów (zob. [55]). Jest to metoda uniwersalna, zalecana w nauczaniu różnych przedmiotów, ale w matematyce - ze względu na abstrakcyjny i operatywny charakter pojęć matematycznych - ma specyficzne znaczenie. W nauczaniu czynnościowym staramy się ukazywać matematykę od strony pojęciowej, a nie reguł i algorytmów, jak to miało miejsce w koncepcji mechanistycznej. Ważne są tutaj pojęcia, definicje, prawa, twierdzenia, rozumowania, a dopiero później, jako podsumowanie i ukoronowanie różnorodnych czynności, formułowanie i stosowanie algorytmów. Z kolei w koncepcji integralnej matematyka powinna wyrastać z rzeczywistości, z realnych sytuacji; w wypadku metody czynnościowej przedmioty i zjawiska otaczającego środowiska nie zawsze muszą być punktem wyjścia do pojęć matematycznych. Obok sytuacji realistycznych mogą to być sytuacje sztucznie skonstruowane, wykorzystujące specjalne środki dydaktyczne, a także problemy czysto abstrakcyjne. Nauczanie czynnościowe cechuje się wielką dbałością o precyzję i porządek, o jasność i dobre rozumienie pojęć matematycznych, o zgodność pojęć szkolnych z pojęciami naukowymi; podstawą działalności matematycznej ucznia jest świadomość, w którym miejscu "budowli matematycznej" on się znajduje. Celem nadrzędnym tej metody jest zdobywanie przez ucznia wiedzy operatywnej, nie na drodze chaotycznych prób rozwiązywania schematycznych zadań, czy zbyt swobodnej "twórczości", ale na podstawie dobrze zaplanowanej przez nauczyciela działalności ucznia. Tylko wykwalifikowany nauczyciel, znający dobrze metodykę nauczania, właściwie zaplanuje i doprowadzi do wytworzenia w umyśle ucznia kolejnych elementów wiedzy, z akcentem na "aktywność matematyczną, na działanie w matematycznym świecie i jego powiązanie z rzeczywistością, na twórcze doświadczenie, które uczeń zdobywa stopniowo w toku rozwiązywania zadań otwartych dla twórczości na jego miarę"(zob. [38]). W metodzie czynnościowej realizuje się podejście konstruktywistyczne, w którym uczeń tworzy swoją wiedzę w integracji z materiałami, różnorodnymi zadaniami, na drodze bogatych doświadczeń, pod kierunkiem nauczyciela i we współpracy z kolegami. Nie chodzi jednak o powierzchowne kształtowanie pojęć matematycznych, prowadzące do odpowiedzi na pytanie "co to jest ... ", ale aktywne poznanie metod i technik, które pozwolą rozwiązywać zadania typu "jak można skonstruować ... ". Potwierdzenie tej idei znajdujemy w książce Piageta Dokąd zmierza edukacja w formie rozbudowanej i uzasadnionej licznymi badaniami. Czytamy w niej mianowicie, że podstawowym warunkiem dla całego procesu kształtowania intelektu, szczególnie ważnym w przedmiotach wprowadzających w nauki ścisłe, jest: stosowanie metod aktywnych, pozwalających na spontaniczne poszukiwania i wymagających, aby każda prawda, którą trzeba odkryć, była na nowo odkrywana przez ucznia lub przynajmniej odtwarzana, a nie tylko mu przekazana.

1.3 Rachunek prawdopodobieństwa a gry stochastyczne

Prawdopodobieństwo jest obecne na każdym etapie kształcenia nauczycieli matematyki. Ale nauczycielom matematyki często brakuje konkretnego narzędzia do wprowadzania prawdopodobieństwa w szkole. Sytuacja jest jeszcze większym wyzwaniem dla

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

nauczycieli szkół podstawowych i gimnazjów. Konkretną propozycją dydaktyczną jest wprowadzanie pojęć stochastycznych na gruncie gier losowych, które niosą ze sobą wiele stochastycznych paradoksów. Rozstrzyganie różnych problemów związanych z tymi grami prowadzi do właściwego zrozumienia podstawowych własności i nabycia prawidłowych intuicji. Dzięki paradoksom, pojawiającym się w takich grach, można budować sytuacje dydaktyczne, które służą do wywołania refleksji dydaktycznej u nauczycieli i uczniów. Chociaż prawdopodobieństwo jest obecne na pierwotnych i wtórnych poziomach kształcenia nauczycieli matematyki, to matematykom brakuje konkretnego narzędzia w edukacji probabilistycznej. Nawet dobrze wykształceni nauczyciele matematyki, posiadający dużą wiedzę matematyczną, zwykle potrzebują dodatkowej wiedzy zawodowej związanej z nauczaniem prawdopodobieństwa. Ogólne zasady nauczania, które są skuteczne w innych dziedzinach matematyki, nie zawsze będą skuteczne w nauczaniu probabilistyki. Sytuacja jest jeszcze większym wyzwaniem dla nauczycieli szkół podstawowych. Chociaż nauczyciele nie potrzebują wysokiego poziomu wiedzy matematycznej, to jednak jest im konieczne dogłębne zrozumienie podstawowych pojęć matematyki, których uczą w szkołach, w tym głębokie zrozumienie wzajemnych połączeń i zależności między różnymi aspektami tej wiedzy (zob. [41]). W [2] zostały opisane dodatkowe elementy potrzebne w wiedzy zawodowej nauczycieli:

(a) epistemologia: epistemologiczne refleksje na temat znaczenia pojęć do nauczania, np. różne znaczenia prawdopodobieństwa (zob. [3]);

(b) poznanie: przewidywanie trudności w nauce uczniów, błędów, przeszkód i strategii;

(c) środki i metody dydaktyczne: doświadczenie w dobrym doborze przykładów i sytuacji dydaktycznych oraz narzędzi dydaktycznych; zdolność do krytycznej analizy podręczników, programów nauczania, dokumentów; umiejętność dostosowania statystyki do różnych poziomów nauczania;

(d) umiejętność angażowania i zainteresowania uczniów, uwzględnianie postaw i przekonań uczniów;

(e) interakcje: możliwość tworzenia dobrej komunikacji w klasie i używanie oceny jako sposobu wydawania instrukcji.

Dużą rolę w nauczaniu prawdopodobieństwa mają klasyczne paradoksy. Dzięki paradoksom można organizować niektóre działania dydaktyczne skierowane do nauczycieli matematyki. Celem tych działań jest sprowokowanie refleksji nauczycieli nad elementarnymi pojęciami stochastycznymi. Działania te pomagają nauczycielom zrozumieć trudności i przeszkody uczniów i pozwalają im rozbudować własną bazę metodologiczną i dydaktyczną.

Wprowadzenie grafu stochastycznego do nauczaniu rachunku prawdopodobieństwa ma te właściwe intuicje stochastyczne tworzyć, kształcić i w odpowiedni sposób rozwijać. Jednocześnie proces ten budujemy wprowadzając szczególny rodzaj doświadczeń losowych i problemów generowanych przez te doświadczenia.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

2 Kompendium z probabilistyki

2.1 Przestrzeń probabilistyczna ziarnista, zmienna losowa i generowana przez nią przestrzeń probabilistyczna na prostej

Przedmiotem rachunku prawdopodobieństwa jest konstruowanie i badanie przestrzeni probabilistycznych. Taką przestrzenią (w myśl aksjomatycznej definicji Kołmogorowa) jest trójka $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, gdzie Ω jest dowolnym, niepustym zbiorem, $\mathcal{Z}$ jest σ-ciałem podzbiorów zbioru Ω, a P miarą unormowaną na $\mathcal{Z}$ (por. [4], s. 94. oraz [60], s. 23.). Zbiór Ω nazywa się przestrzenią zdarzeń elementarnych, a jego elementy zdarzeniami elementarnymi. Elementy rodziny $\mathcal{Z}$ nazywamy zdarzeniami, a liczbę $P(A)$ dla $A \in \mathcal{Z}$ nazywamy prawdopodobieństwem zdarzenia A.

Definicja 1. Niech Ω będzie dowolnym, co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym zbiorem. Funkcję $p\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, nieujemną i spełniającą warunek

$$\sum_{\omega\in\Omega} p(\omega) = 1,$$

nazywamy rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω.

Jeżeli $s \in \mathbb{N}_2$ i $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ oraz $p(\omega) = \frac{1}{s}$ dla każdego $\omega \in \Omega$, to funkcję p nazywamy klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω.

Definicja 2. Niech p będzie rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω, $\mathcal{Z} = 2^\Omega$ oraz $P\colon \mathcal{Z}\longrightarrow\mathbb{R}$, gdzie

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{gdy } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{gdy } A = \{\omega\}, \\ \sum\limits_{\omega\in\Omega\wedge\omega\in A} p(\omega), & \text{gdy } \#A \geqslant 2. \end{cases} \tag{1}$$

Można wykazać, że trójka $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną w sensie aksjomatycznej definicji (por. [4], s. 94. oraz [60], s. 23.), a więc P jest prawdopodobieństwem na $\mathcal{Z}$. Tak określoną trójkę (za pomocą pary (Ω, p)) nazywamy ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Ziarnistą przestrzeń probabilistyczną nazywamy także co najwyżej przeliczalną.

Definicja 3. Zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ nazywamy każdy podzbiór zbioru Ω. Zbiór $\mathcal{Z} = 2^\Omega$ jest rodziną wszystkich zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Nazywamy ją rodziną zdarzeń pokrewnych. Zdarzenie $\emptyset$ nazywamy zdarzeniem niemożliwym, a zdarzenie Ω zdarzeniem pewnym.

Definicja 4. Rodzinę co najmniej dwóch zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, z których każde dwa są rozłączne i których suma jest zdarzeniem pewnym, nazywamy układem zupełnym zdarzeń.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Jeżeli A jest przeliczalnym podzbiorem zbioru Ω, to prawdopodobieństwo zdarzenia A jest (zgodnie z definicją 2) sumą pewnego szeregu liczbowego. Trudności związane z obliczaniem prawdopodobieństwa zdarzenia w przeliczalnych (a więc nieskończonych) przestrzeniach probabilistycznych wynikają m. in. z trudności dotyczących znajdowania sum szeregów liczbowych (twierdzenia o zbieżności szeregów orzekają, że dla pewnych szeregów liczbowych takie sumy istnieją, nie dają jednak recept na ich znajdowanie).

Jeśli p jest klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω, to trójkę $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ nazywamy klasyczną przestrzenią probabilistyczną. Z definicji 2 wynika, że funkcja P zadana jest wówczas wzorem:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} \qquad \text{dla } A \subset \Omega.$$

Funkcję P nazywamy prawdopodobieństwem klasycznym.

W pracy używamy terminu ziarnista (w znaczeniu, jakie ma w j. angielskim słowo discrete, czyli oderwany, odosobniony, nieciągły) zamiast rozpowszechnionego w literaturze probabilistycznej terminu dyskretny (który jest tłumaczeniem z angielskiego słowa discreet = roztropny, ostrożny, dyskretny, pełen rezerwy – zob. J. Stanisławski, Wielki słownik angielsko-polski, Wiedza Powszechna, Warszawa 1966, s. 222., por. także [50], s. 212.). Za używaniem terminu „ziarnisty” zamiast „dyskretny” opowiada się W. Nowicki w książce O ścisłość i kulturę słowa w technice, Wydawnictwa Komunikacji i Łączności, Warszawa 1978 (s. 69-72.).

Aby określić ziarnistą przestrzeń probabilistyczną $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ wystarczy określić na co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym zbiorze Ω rozkład prawdopodobieństwa p. Parę (Ω, p) możemy zatem także nazywać ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. W dalszym ciągu konstruowanie przestrzeni probabilistycznej rozumiane jest jako konstruowanie pary (Ω, p), takiej że Ω jest zbiorem co najmniej dwuelementowym i co najwyżej przeliczalnym, p zaś – rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω. Prawdopodobieństwo w tej przestrzeni jest funkcją P określoną na zbiorze $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$ wzorem (1). Jeśli funkcja p jest klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa, to parę (Ω, p) nazywamy klasyczną przestrzenią probabilistyczną

■ Niech $\Omega^* = \{a, b, c\}$, $p^*(a) = \frac{1}{3}$, $p^*(b) = 0$ i $p^*(c) = \frac{2}{3}$. Rodziną zdarzeń w tej przestrzeni jest zbiór

$$\mathcal{Z}^* = \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\}.$$

Prawdopodobieństwo w tej przestrzeni jest funkcją $P^* : \mathcal{Z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

P^*:

$A \in \mathcal{Z}^*$:	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$
$P^*(A)$:	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1

Trójka $(\Omega^*, \mathcal{Z}^*, P^*)$, powstała z pary (Ω^*, p^*), jest przestrzenią probabilistyczną w sensie definicji aksjomatycznej.

■ Załóżmy, że $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest przestrzenią probabilistyczną w sensie definicji aksjomatycznej i że Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym. Jest więc $\Omega = \{\omega_j : j \in J\}$,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

gdzie $J = \{1, 2, ..., s\}$, bądź $J = \{1, 2, 3, ...\}$. Niech $P(\{\omega_j\}) = p(\omega_j)$ dla $\omega_j \in \Omega$. Na zbiorze Ω została tym samym określona funkcja p, która – jak łatwo wykazać – jest rozkładem prawdopodobieństwa na tym zbiorze.

Jeśli Ω jest zbiorem co najwyżej przeliczalnym, to określenie przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ w sensie definicji aksjomatycznej jest równoważne z określeniem na zbiorze Ω rozkładu prawdopodobieństwa p, a tym samym pary (Ω, p).

Ziarnista przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest dalej utożsamiana z parą (Ω, p), która – w myśl definicji 2 – tę trójkę określa jednoznacznie.

Jeżeli $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną, to również parę (Ω, p) nazywamy klasyczną przestrzenią probabilistyczną (funkcja p jest rozkładem klasycznym).

Definicja 5. Przestrzenie probabilistyczne (Ω_1, p_1) i (Ω_2, p_2) nazywamy równoważnymi lub izomorficznymi, jeśli istnieje bijekcja g ze zbioru Ω_1 na zbiór Ω_2, taka że

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2 \quad [\omega_2 = g(\omega_1) \Rightarrow p_2(\omega_2) = p_1(\omega_1)].$$

Dwie klasyczne przestrzenie probabilistyczne (Ω_1, p_1) i (Ω_2, p_2) są izomorficzne wtedy i tylko wtedy, gdy zbiory Ω_1 i Ω_2 są równoliczne.

Definicja 6.

Załóżmy, że pary (Ω_1, p_1) i (Ω_2, p_2) są ziarnistymi przestrzeniami probabilistycznymi. Niech $\Omega_{1-2} = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_1 \wedge y \in \Omega_2\}$. Określmy na zbiorze Ω_{1-2} funkcję p_{1-2} następująco:

$$p_{1-2}(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y) \quad \text{dla każdego } x \in \Omega_1 \quad \text{i dla każdego} \quad y \in \Omega_2.$$

Parę (Ω_{1-2}, p_{1-2}) nazywamy produktem kartezjańskim przestrzeni probabilistycznych (Ω_1, p_1) oraz (Ω_2, p_2) i oznaczamy $(\Omega_1, p_1) \times (\Omega_2, p_2)$. Produkt $(\Omega, p) \times (\Omega, p)$, nazywamy kwadratem kartezjańskim i oznaczamy $(\Omega, p)^2$.

Nietrudno wykazać, że

— produkt kartezjański ziarnistych przestrzeni probabilistycznych jest też ziarnistą przestrzenią probabilistyczną;

— produkt kartezjański klasycznych przestrzeni probabilistycznych jest klasyczną przestrzenią probabilistyczną.

Pojęcie produktu kartezjańskiego uogólnia się na n przestrzeni probabilistycznych, gdzie $n \in \mathbb{N}_2$ oraz przeliczalnie wiele przestrzeni probabilistycznych. Produkt kartezjański n identycznych przestrzeni probabilistycznych (Ω, p) nazywamy n-tą potęgą kartezjańską przestrzeni (Ω, p) i oznaczamy $(\Omega, p)^n$. Produkt kartezjański przeliczalnie wielu identycznych przestrzeni probabilistycznych (Ω, p) nazywamy przeliczalną potęgą kartezjańską przestrzeni (Ω, p) i oznaczamy $(\Omega, p)^\infty$.

Definicja 7. Niech (Ω, p) będzie ziarnistą przestrzenią probabilistyczną. Zmienną losową w tej przestrzeni probabilistycznej nazywamy każdą funkcję $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja 8. Niech Ω_X oznacza zbiór wartości zmiennej losowej X w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Funkcję $p_X : \Omega_X \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$p_X(x_j) = \sum_{\omega \in \Omega \wedge X(\omega) = x_j} p(\omega) \quad \text{dla } x_j \in \Omega_X, \tag{2}$$

nazywamy rozkładem zmiennej losowej X.

Funkcja p_X jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_X, a więc para (Ω_X, p_X) jest przestrzenią probabilistyczną. Nazywamy ją przestrzenią probabilistyczną generowaną na prostej przez zmienną losową X.

Niech $\{X = x_j\} = \{\omega \in \Omega \colon X(\omega) = x_j\}$ dla $x_j \in \Omega_X$. Zbiór $\{X = x_j\}$ jest zdarzeniem w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Niech $P(X = x_j)$ oznacza prawdopodobieństwo zdarzenia $\{X = x_j\}$. Liczbę $P(X = x_j)$ nazywamy prawdopodobieństwem, z jakim zmienna losowa X przyjmuje (może przyjąć) wartość x_j.

Nietrudno zauważyć, że jeśli p_X jest funkcją określoną wzorem (2), to

$$p_X(x_j) = P(X = x_j).$$

Definicja 9. Niech X będzie zmienną losową w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p). Funkcję P_X określoną na rodzinie $\mathcal{B}$ borelowskich podzbiorów prostej wzorem

$$P_X(A) = \sum_{x_j \in A} p_X(x_j) \quad \text{dla } A \in \mathcal{B}, \tag{3}$$

nazywamy prawdopodobieństwem generowanym na prostej przez zmienną losową X.

Można wykazać, że trójka $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ jest przestrzenią probabilistyczną w sensie definicji aksjomatycznej.

Jeżeli X jest zmienną losową w ziarnistej przestrzeni probabilistycznej, to ze wzoru (3) wynika, że funkcja P_X jest jednoznacznie określona przez funkcję p_X.

Definicja 10. Niech X będzie zmienną losową w przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), a Ω_X zbiorem jej wartości. Jeżeli szereg

$$\sum_{x_j \in \Omega_X} x_j \cdot p_X(x_j)$$

jest bezwzględnie zbieżny, to jego sumę nazywamy wartością oczekiwaną zmiennej losowej X i oznaczamy $E(X)$.

2.2 Ziarniste doświadczenie losowe i jego model stochastyczny. Reguły drzewa stochastycznego

Przestrzenie probabilistyczne są konstruowane i badane w tej pracy w kontekście tzw. doświadczeń losowych (zwanych czekaniami na serie). Doświadczenie losowe rozumiemy dalej tak, jak określa je W. Feller. W pracy [11] (zob. s. 16-17.) wyróżnia on

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

- doświadczenia losowe realne (rozpad atomu radioaktywnego, konstytuowanie się genotypu potomka, rzut konkretną monetą, wykładanie kart z potasowanej talii) oraz

- doświadczenia losowe pomyślane, jako (już) obiekty świata matematyki (rzut symetryczną monetą, losowanie punktu na obwodzie tarczy ruletki, losowanie punktu z przedziału liczbowego itd., symetryczna moneta jak i wspomniana ruletka, której wirująca strzałka jest odcinkiem, są obiektami świata matematyki).

Zbiór wyników doświadczenia losowego δ jest co najmniej dwuelementowy. Jeśli ten zbiór jest co najwyżej przeliczalny, to doświadczenie losowe nazywamy ziarnistym. Wśród ziarnistych doświadczeń losowych wyróżniamy te, które przebiegają etapami. Nazywamy je doświadczeniami wieloetapowymi (por. [39], s. 75.). Wśród doświadczeń przebiegających etapami wyróżniamy te, których liczba etapów jest losowa. Nazywamy je doświadczeniami losowymi o losowej liczbie etapów. Takim doświadczeniem o losowej liczbie etapów jest np. powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wypadnie reszka.

□ [model stochastyczny doświadczenia losowego] Niech δ będzie ziarnistym doświadczeniem losowym (pomyślanym lub realnym). Modelem stochastycznym takiego doświadczenia δ nazywamy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega_\delta, p_\delta)$ taką, że Ω_δ jest zbiorem wyników doświadczenia δ, a p_δ jest funkcją, która każdemu wynikowi doświadczenia δ przypisuje prawdopodobieństwo, z jakim doświadczenie może się tym wynikiem zakończyć (por. [48], s. 41. oraz [39], s. 43.).

Przestrzeń probabilistyczna pojawia się na ogół w kontekście pewnego doświadczenia losowego, jako jego model stochastyczny.

□ [reguły drzewa stochastycznego] W przypadku doświadczenia wieloetapowego δ tworzymy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega_\delta, p_\delta)$ jako jego model, za pomocą następujących reguł drzewa stochastycznego (zob. [48], s. 51-67.):

(R1) wynik wieloetapowego doświadczenia losowego δ (jako element zbioru Ω_δ, a zarazem jako tzw. zdarzenie elementarne) przedstawiamy jako ciąg wyników kolejnych etapów,

(R2) rozkład prawdopodobieństwa p_δ na zbiorze Ω_δ określamy tzw. regułą mnożenia, która orzeka: jeśli $\omega \in \Omega_\delta$ i $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, para (Ω_k, p_k) jest modelem k-tego etapu oraz $a_k \in \Omega_k$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$, to

$$p_\delta(\omega) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n).$$

Reguła (R2) pozwala określać rozkład prawdopodobieństwa p_δ na zbiorze Ω_δ wyników doświadczenia wieloetapowego δ, nie daje jednak podstaw do uznawania liczby $p_\delta(\omega)$ za prawdopodobieństwo wyniku ω (por. [48], s. 59.).

Jeśli δ jest doświadczeniem losowym wieloetapowym, to przestrzeń probabilistyczną $(\Omega_\delta, p_\delta)$ określoną regułami drzewa stochastycznego (R1) i (R2) uznajemy za model tego doświadczenia.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

☐ [urnowa interpretacja skończonej przestrzeni probabilistycznej] Załóżmy, że (Ω, p) jest przestrzenią probabilistyczną, że $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ i że wartości funkcji p są wymierne. Niech $p(\omega_j) = \frac{k_j}{m}$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, s$. Rozważmy urnę U, w której jest m kul i k_j kul ma etykietę ω_j, gdzie $j = 1, 2, 3, \ldots, s$. Wynikiem losowania kuli z urny U jest etykieta wylosowanej kuli. Przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem takiego losowania. Każdą skończoną przestrzeń probabilistyczną (Ω, p), gdzie p jest funkcją o wartościach wymiernych, możemy interpretować jako model losowania kuli z pewnej urny. Powiemy krótko, że taką przestrzeń probabilistyczną można utożsamiać z ową urną. Mówimy tu o urnowej prezentacji skończonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p).

☐ [ruletkowa prezentacja skończonej przestrzeni probabilistycznej] Niech para (Ω, p), gdzie $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, będzie przestrzenią probabilistyczną. Rozważmy w jej kontekście ruletkę R, której tarcza podzielona jest na $(r+1)$ sektorów z etykietami $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$, przy czym iloraz miary kąta sektora z etykietą ω_j i liczby 2π jest równy $p(\omega_j)$ dla $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Przestrzeń probabilistyczna (Ω, p) jest modelem stochastycznym losowania sektora za pomocą opisanej ruletki R. Każdą skończoną przestrzeń probabilistyczną możemy zatem utożsamiać z pewną ruletką. Mówimy tu o ruletkowej prezentacji skończonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p).

W przypadku doświadczeń o losowej liczbie etapów przyjmujemy umowę, że kolejne etapy są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu. Czas trwania doświadczenia δ o losowej liczbie etapów (odmierzany liczbą etapów i rozważany przed wykonaniem doświadczenia δ) jest zmienną losową w jego modelu, tj. w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_\delta, p_\delta)$ określonej regułami drzewa stochastycznego (`R1`) i (`R2`).

Przedmiotem pracy jest konstruowanie i badanie przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych, które są modelami doświadczeń losowych o losowej liczbie etapów.

Rozważanie przeliczalnych przestrzeni probabilistycznych jako modeli doświadczeń losowych wieloetapowych pozwala opisywać te przestrzenie i procedury ich badania w naturalnym języku (czekanie, czas czekania, uzyskanie serii jako zdarzenie itd.)

Przykład 1 (model stochastyczny rzutu monetą) Modelem stochastycznym rzutu symetryczną monetą jest para (Ω_M, p_M), gdzie

$$\Omega_M = \{0, 1\} \qquad \text{i} \qquad p_M(0) = p_M(1) = \frac{1}{2},$$

gdzie cyfra 0 jest kodem wyniku `wypadnie orzeł`, cyfra 1 – wyniku `wypadnie reszka`.

Przykład 2 (model stochastyczny n-krotnego rzutu monetą) Zgodnie z regułą (`R1`) wynik n-krotnego rzutu monetą jest n-wyrazową wariacją zbioru $\{0, 1\}$. Wyniki tego doświadczenia losowego tworzą zatem zbiór $\Omega_{nM} = \{0, 1\}^n$. Wszystkie wyniki są jednakowo prawdopodobne (wynika to z faktu, że w każdym rzucie orzeł i reszka są jednakowo prawdopodobne) i jest ich 2^n, a zatem prawdopodobieństwo każdego jest równe $\frac{1}{2^n}$. Zauważmy, że $\frac{1}{2^n} = (\frac{1}{2})^n$. Modelem stochastycznym n-krotnego rzutu monetą jest zatem

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

klasyczna przestrzeń probabilistyczna (Ω_{nM}, p_{nM}), gdzie

$$\Omega_{nM} = \{0,1\}^n \qquad \text{i} \qquad p_{nM}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{dla każdego } \omega \in \Omega_{nM}.$$

Zauważmy, że określając model n-krotnego rzutu monetą za pomocą reguł drzewa stochastycznego otrzymujemy tę samą przestrzeń probabilistyczną (Ω_{nM}, p_{nM}).

Przykład 3 (model stochastyczny czekania na reszkę) Powtarzanie rzutu monetą tak długo, aż wypadnie reszka, nazywamy czekaniem na reszkę i oznaczamy δ_r. Zgodnie z regułą (R1) każdy wynik czekania na reszkę jest ciągiem, którego ostatni wyraz jest równy 1, a wszystkie wcześniejsze wyrazy są równe 0. Wyniki tego doświadczenia losowego tworzą zatem zbiór $\Omega_r = \{1, 01, 001, 0001, \ldots\}$. Jeżeli $\omega \in \Omega_r$, to zapis $|\omega|$ oznacza liczbę wyrazów ciągu ω. Jeżeli $\omega \in \Omega_r$ i $|\omega| = k$, to ω jest szczególnym wynikiem k-krotnego rzutu monetą, a zatem jego prawdopodobieństwo jest równe $\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Modelem stochastycznym czekania na reszkę jest zatem przestrzeń probabilistyczna (Ω_r, p_r), gdzie

$$p_r(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \qquad \text{dla każdego } \omega \in \Omega_r.$$

Określając rozkład prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_r za pomocą reguły (R2) otrzymujemy funkcję, która jest równa funkcji p_r. Za pomocą reguł drzewa stochastycznego uzyskujemy w tym przypadku przestrzeń probabilistyczną (jako model czekania δ_r), która jest równocześnie modelem stochastycznym doświadczenia losowego.

2.3 Serie sukcesów i porażek

Zakładamy, że zbiór wyników każdego etapu doświadczenia losowego przebiegającego etapami jest skończony. Wyniki doświadczenia losowego wieloetapowego są w pracy (w myśl reguły (R1)) ciągami wyników kolejnych etapów, są więc wariacjami pewnego zbioru skończonego. Liczbę wyrazów ciągu skończonego ω nazywamy jego długością i oznaczamy $|\omega|$.

Definicja 11. Niech ω oznacza dowolny ciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n)$. Niech $k \leqslant n$. Podciąg $(a_1, a_2, a_3, \ldots, a_k)$ nazywamy początkiem o długości k ciągu ω. Podciąg $(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \ldots, a_n)$ nazywamy końcówką o długości k ciągu ω.

Definicja 12. Niech u będzie dowolną, ustaloną liczbą rzeczywistą z przedziału $(0,1)$. Parę $(\Omega_{0-1}, p^u_{0-1})$, gdzie

$$\Omega_{0-1} = \{0,1\} \qquad \text{oraz} \qquad p^u_{0-1}(1) = u \quad \text{i} \quad p^u_{0-1}(0) = v = 1-u,$$

nazywamy przestrzenią zero-jedynkową.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja 13. Każde doświadczenie losowe, którego model jest przestrzenią probabilistyczną zero-jedynkową $(\Omega_{0-1}, p^u_{0-1})$, nazywamy próbą Bernoulliego albo krótko próbą i oznaczamy przez δ^u_{0-1}.

Wynik próby Bernoulliego oznaczony cyfrą 1 nazywamy sukcesem, wynik oznaczony cyfrą 0 – porażką. Próbę Bernoulliego δ^u_{0-1} jednoznacznie określa ustalona liczba rzeczywista u z przedziału $(0, 1)$, którą nazywamy dalej prawdopodobieństwem sukcesu.

Definicja 14. Niech $m \in \mathbb{N}_1$. Każdy wynik m-krotnego powtarzania próby δ^u_{0-1}, tj. każdą m-wyrazową wariację zbioru $\{0, 1\}$, nazywamy serią sukcesów i porażek i oznaczamy przez α. Liczbę m nazywamy długością serii α. Wyniki 0 i 1 próby δ^u_{0-1} są seriami o długości 1.

UWAGA. W przypadku $u = \frac{1}{2}$ przyjmujemy umowę, że próba $\delta^{\frac{1}{2}}_{0-1}$ jest rzutem monetą, a serię sukcesów i porażek α nazywamy serią orłów i reszek α.

Zapis $\alpha \in \{0, 1\}^m$ oznacza, że α jest serią sukcesów i porażek o długości m. Zapis $|\alpha| = m$ oznacza, że seria α ma długość m. Ciąg 10110 jest serią sukcesów i porażek o długości 5, czyli $10110 \in \{0, 1\}^5$ oraz $|10110| = 5$.

Definicja 15. Niech $\alpha_1 \in \{0, 1\}^m$, $\alpha_2 \in \{0, 1\}^n$, gdzie $m, n \in \mathbb{N}_1$. Mówimy, że seria α_1 zawiera się w serii α_2 i zapisujemy $\alpha_1 \subset \alpha_2$, jeśli α_1 jest podciągiem kolejnych wyrazów ciągu α_2. Jeśli seria α_1 nie zawiera się w serii α_2, to piszemy $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$.

Jest np. $001010 \subset 11001010111$ oraz $101 \not\subset 011110$. W szczególności $\alpha \subset \alpha$.

Definicja 16. Niech $\alpha_k \in \{0, 1\}^{m_k}$, gdzie $m_k \in \mathbb{N}_1$ dla $k = 1, 2, \ldots, n$. Jeżeli $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$ i $\alpha_2 \not\subset \alpha_1$, to mówimy, że serie α_1 i α_2 są dyferentne. Jeżeli spośród serii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ każde dwie są dyferentne, to mówimy, że serie te są dyferentne parami.

Definicja 17. Niech $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \{0, 1\}^m$, $m \in \mathbb{N}_1$ oraz $h(j) = 1 - j$ dla $j \in \{0, 1\}$. Ciąg $(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_m))$ nazywamy serią dualną do serii α i oznaczamy $\overline{\alpha}$. Serie α i $\overline{\alpha}$ nazywamy seriami dualnymi.

Jeżeli $\alpha = 0101001$, to $\overline{\alpha} = 1010110$. Jeśli $\alpha = 0$, to $\overline{\alpha} = 1$.

Niech $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0, 1\}^n$. Liczbę wyrazów równych 1 w ciągu ω, tj. sumę $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, oznaczamy przez $J(\omega)$.

2.4 Czekanie na serię sukcesów i porażek oraz czas tego czekania jako zmienna losowa

Definicja 18. Niech α będzie ustaloną serią sukcesów i porażek o długości m, $m \in \mathbb{N}_1$. Powtarzanie próby δ^u_{0-1} tak długo, aż wyniki m ostatnich prób utworzą serię α, nazywamy czekaniem na serię α i oznaczamy δ^u_α.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Zgodnie z regułami drzewa stochastycznego każdy wynik doświadczenia δ_α^u jest co najmniej m-wyrazową wariacją zbioru $\{0, 1\}$ i taką, że jej końcówka o długości m jest serią α i żaden inny m-wyrazowy podciąg kolejnych wcześniejszych wyrazów tej wariacji nie jest serią α. Niech Ω_α oznacza zbiór takich wariacji. Jest to zbiór wyników czekania δ_α^u. Funkcja określona regułą (R2) na zbiorze Ω_α jest funkcją p_α^u zadaną wzorem

$$p_\alpha^u(\omega) = u^{J(\omega)} v^{|\omega|-J(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in \Omega_\alpha.$$

Para $(\Omega_\alpha, p_\alpha^u)$ jest przestrzenią probabilistyczną. Zgodnie z definicją ?? jest to model doświadczenia δ_α^u.

Liczbę prób wykonanych w doświadczeniu δ_α^u nazywamy czasem czekania na serię α. Ta liczba (mówimy o niej przed rozpoczęciem czekania) jest zmienną losową T_α^u w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_\alpha, p_\alpha^u)$ i

$$T_\alpha^u(\omega) = |\omega| \quad \text{dla } \omega \in \Omega_\alpha.$$

Wartości zmiennej losowej T_α^u tworzą zbiór $\Omega_{T_\alpha^u} = \{|\alpha|, |\alpha|+1, |\alpha|+2, \ldots\}$. Rozkład zmiennej losowej T_α^u jest funkcją $p_{T_\alpha^u} \colon \Omega_{T_\alpha^u} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie

$$p_{T_\alpha^u}(k) = P(T_\alpha^u = k) = \sum_{\omega \in \Omega \wedge T_\alpha^u(\omega) = k} p(\omega).$$

Wartość oczekiwana zmiennej losowej T_α^u jest sumą szeregu

$$\sum_{k \in \Omega_{T_\alpha^u}} k \cdot p_{T_\alpha^u}(k).$$

Liczba $E(T_\alpha^u)$ jest średnim czasem czekania na serię α. W pracy mowa jest o sposobie obliczania tego średniego czasu.

Definicja 19. Niech α_1 i α_2 będą seriami sukcesów i porażek. Jeżeli $E(T_{\alpha_1}^u) = E(T_{\alpha_2}^u)$, to serie α_1 i α_2 nazywamy jednakowo szybkimi w punkcie u i oznaczamy $(\alpha_1 \Diamond \alpha_2)_u$.

Definicja 20. Niech α_1 i α_2 będą seriami sukcesów i porażek. Jeżeli $E(T_{\alpha_1}^u) < E(T_{\alpha_2}^u)$, to serię α_1 nazywamy szybszą od serii α_2 w punkcie u i oznaczamy $(\alpha_1 \lhd \alpha_2)_u$.

2.5 Czekanie na jedną z wielu serii sukcesów i porażek oraz czas tego czekania jako zmienna losowa

Niech δ_{0-1}^u będzie próbą, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ zaś ustalonymi seriami sukcesów i porażek, parami dyferentnymi. Niech $|\alpha_j| = m_j$ dla $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Powtarzanie próby δ_{0-1}^u tak długo, aż:

– albo wyniki m_1 ostatnich prób utworzą serię α_1,

– albo wyniki m_2 ostatnich prób utworzą serię α_2,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$\vdots$

– albo wyniki m_n ostatnich prób utworzą serię α_n,

nazywamy czekaniem na jedną z n serii sukcesów i porażek i oznaczamy $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$.

Niech $r = min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Każdy wynik doświadczenia $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ jest co najmniej r-wyrazową wariacją zbioru $\{0,1\}$ i taką, że

– albo jej końcówka o długości m_1 jest serią α_1,

– albo jej końcówka o długości m_2 jest serią α_2,

$\vdots$

– albo jej końcówka o długości m_n jest serią α_n,

i żaden inny podciąg kolejnych wcześniejszych jej wyrazów nie tworzy żadnej z serii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Zbiór wszystkich wyników czekania $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ oznaczamy przez $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$.

Jeśli $p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ jest funkcją określoną regułą mnożenia, to

$$p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\omega) = u^{J(\omega)} \cdot v^{|\omega|-J(\omega)} \quad \text{dla } \omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}.$$

Para $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$ jest modelem czekania $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$.

Niech $P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ oznacza prawdopodobieństwo w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$. Z czekaniem $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ zwiążmy zdarzenia:

$$A_j = \{\text{czekanie } \delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n} \text{ zakończy się serią } \alpha_j\} \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Zdarzenie A_j oznaczamy dalej przez $\{\ldots \alpha_j\}$, a prawdopodobieństwo tego zdarzenia przez $P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots \alpha_j)$. W przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$ zdarzenie $\{\ldots \alpha_j\}$ jest zbiorem tych ciągów ze zbioru $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$, których końcówka o długości m_j jest serią α_j. Z definicji ?? wynika, że

$$P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots \alpha_j) = \sum_{\omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n} \wedge \omega \in \{\ldots \alpha_j\}} p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\omega).$$

Liczbę wykonanych prób w doświadczeniu losowym $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ nazywamy czasem czekania na jedną z serii $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Ten czas jest zmienną losową $T^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$. Jej wartości tworzą przeliczalny zbiór

$$\Omega_{T^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}} = \{r, r+1, r+2, \ldots\}.$$

Definicja 21. Rozważmy czekanie $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ i jego model $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$. Jeżeli

$$P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots \alpha_1) = P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots \alpha_2),$$

to serie α_1 i α_2 nazywamy jednakowo dobrymi w czekaniu $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ i oznaczamy przez $(\alpha_1 \approx \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}_u$. Jeżeli serie α_1 i α_2 są jednakowo dobre w czekaniu $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, to nazywamy je jednakowo dobrymi w punkcie u i oznaczamy przez $(\alpha_1 \approx \alpha_2)_u$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja 22. Niech $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$ będzie modelem czekania $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$. Jeżeli

$$P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_1) > P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_2),$$

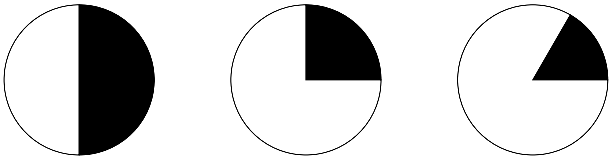
to serię α_1 nazywamy lepszą od serii α_2 w czekaniu $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ i oznaczamy symbolem $(\alpha_1 \gg \alpha_2)_u^{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$. Jeżeli seria α_1 jest lepsza od serii α_2 w czekaniu $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, to mówimy, że seria α_1 jest lepsza od serii α_2 w punkcie u i oznaczamy $(\alpha_1 \gg \alpha_2)_u$.

2.6 Seria kolorów (flaga). Czekanie na jedną z wielu serii kolorów oraz czas tego czekania jako zmienna losowa

Każdą próbę δ^u_{0-1} możemy interpretować jako losowanie sektora ruletki R^u_{0-1}, której tarcza podzielona jest na dwa sektory, biały i czarny, gdzie u jest ilorazem miary kąta czarnego sektora i liczby 2π. Jeśli strzałka ruletki zatrzyma się na czarnym sektorze (jeśli zostanie wylosowany czarny kolor), to mówimy o sukcesie, jeśli na białym, to mówimy o porażce. Ruletki, których tarcze mamy na rysunku 1, można utożsamiać z próbą δ^u_{0-1}, przy czym

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \quad \text{dla ruletki z rys. 1a),} \\ u &= \frac{1}{4} \quad \text{dla ruletki z rys. 1b),} \\ u &= \frac{1}{6} \quad \text{dla ruletki z rys. 1c).} \end{aligned}$$

Seria sukcesów i porażek staje się w tej interpretacji serią dwóch kolorów, a więc pewną flagą czarno-białą. Czekanie na serię (czekanie na jedną z wielu serii) sukcesów i porażek staje się w tej interpretacji czekaniem na flagę (czekaniem na jedną z wielu flag).



a) b) c)

Rys. 1

Ta ruletkowa prezentacja próby oraz serii sukcesów i porażek jako flagi, sugeruje uogólnienie serii sukcesów i porażek na serię kolorów w liczbie większej niż 2, a więc na flagi wielokolorowe jako wyniki wielokrotnego losowania sektora za pomocą ruletki z liczbą kolorowych sektorów większą niż 2. To z kolei inspiruje nowe doświadczenia o losowej liczbie etapów, które są czekaniami na taką flagę lub na jedną z wielu takich flag. To uogólnienie jest przedmiotem dalszych rozważań.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja 23. Niech $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, gdzie $n \in \mathbb{N}_1$. Załóżmy, że

$$p(j) = u_j > 0 \quad \text{dla } j \in \Omega \qquad \text{oraz} \qquad \sum_{j \in \Omega} u_j = 1.$$

Każde doświadczenie losowe, którego modelem jest przestrzeń probabilistyczna (Ω, p), nazywamy n-próbą i oznaczamy $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$, albo δ_n jeśli p jest klasycznym rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω. Przyjmujemy dalej, że w przypadku $n = 2$ zbiór Ω wyników n-próby jest zbiorem $\{0, 1\}$, a n-próba jest próbą Bernoulliego δ^u_{0-1}.

Każdą n-próbę $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ określa jednoznacznie wektor stochastyczny $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, gdzie $u_j = p(j)$ dla $j = 1, 2, \ldots, n$. Zgodnie z opisaną na s. 11. ruletkową prezentacją skończonej przestrzeni probabilistycznej, tę n-próbę możemy interpretować jako losowanie sektora za pomocą ruletki o n ponumerowanych sektorach o tej własności, że iloraz miary kąta sektora j i liczby 2π jest równy u_j. W tej interpretacji model losowania sektora za pomocą takiej ruletki jest parą (Ω, p), gdzie $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, a funkcję p określa wektor $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

Każdą skończoną przestrzeń probabilistyczną będziemy dalej interpretować jako model stochastyczny losowania sektora za pomocą opisanej ruletki. Zamiast ruletki z ponumerowanymi sektorami możemy rozpatrywać ruletkę z różnokolorowymi sektorami. Stąd w dalszych opisach mowa jest o seriach kolorów, czyli flagach.

Definicja 24. Niech $m \in \mathbb{N}_1$. Wynik m-krotnego powtarzania n-próby $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$, tj. każdą m-wyrazową wariację zbioru $\{1, 2, \ldots, n\}$, nazywamy serią kolorów albo flagą n-kolorową, albo krótko flagą. Liczbę m nazywamy długością serii kolorów albo długością flagi. Jeżeli $n = 2$, to seria kolorów o długości m jest m-wyrazową wariacją zbioru $\{0, 1\}$, która (jako flaga biało-czarna) jest serią sukcesów i porażek (zob. def. 14). Jeśli α oznacza serię kolorów (flagę), to zapis $|\alpha|$ oznacza jej długość.

Definicja 25. Niech α będzie ustaloną flagą o długości m. Powtarzanie n-próby $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ tak długo, aż wyniki m ostatnich prób utworzą flagę α, nazywamy czekaniem na flagę α i oznaczamy $\delta_\alpha^{u_1-\ldots-u_n}$.

Liczba wykonanych prób w doświadczeniu losowym $\delta_\alpha^{u_1-\ldots-u_n}$ jest zmienną losową $T_\alpha^{u_1-\ldots-u_n}$ w modelu tego doświadczenia. Tę zmienną losową nazywamy czasem czekania na flagę α.

Definicja 26. Niech α_1 i α_2 będą seriami kolorów oraz $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{|\alpha_1|}$, $\alpha_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{|\alpha_2|}$, gdzie $n \geqslant 2$. Jeżeli

$$E(T_{\alpha_1}^{u_1-\ldots-u_n}) = E(T_{\alpha_2}^{u_1-\ldots-u_n}),$$

to serie α_1 i α_2 nazywamy jednakowo szybkimi w punkcie $(u_1, \ldots, u_n)$ i oznaczamy

$$(\alpha_1 \Diamond \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja 27. Niech α_1 i α_2 będą seriami kolorów oraz $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{|\alpha_1|}$, $\alpha_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{|\alpha_2|}$, gdzie $n \geqslant 2$. Jeżeli

$$E(T_{\alpha_1}^{u_1-\ldots-u_n}) < E(T_{\alpha_2}^{u_1-\ldots-u_n}),$$

to serię α_1 nazywamy szybszą od serii α_2 w punkcie $(u_1, \ldots, u_n)$ i oznaczamy

$$(\alpha_1 \lhd \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Definicja 28. Niech $m_1, m_2 \in \mathbb{N}_1$, $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{m_1}$ oraz $\alpha_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{m_2}$. Mówimy, że flaga α_1 zawiera się we fladze α_2 i zapisujemy $\alpha_1 \subset \alpha_2$, jeśli α_1 jest podciągiem kolejnych wyrazów ciągu α_2. Zapis $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$ oznacza, że flaga α_1 nie zawiera się we fladze α_2.

Definicja 29. Niech $m_j \in \mathbb{N}_1$, $\alpha_j \in \{1, 2, \ldots, n\}^{m_j}$, gdzie $j = 1, 2, \ldots, k$. Jeżeli $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$ i $\alpha_2 \not\subset \alpha_1$, to mówimy, że flagi α_1 i α_2 są dyferentne. Jeżeli spośród flag $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ każde dwie są dyferentne, to mówimy, że flagi te są dyferentne parami.

Zgodnie z umową przyjętą w definicji 23, w przypadku $n = 2$, zbiór $\{1, 2, \ldots, n\}$ w definicjach 26 – 29 zastępujemy zbiorem $\{0, 1\}$.

Niech $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ będą ustalonymi flagami, parami dyferentnymi. Niech $|\alpha_j| = m_j$ dla $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$. Powtarzanie n-próby $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ tak długo, aż:

– albo wyniki m_1 ostatnich n-prób utworzą flagę α_1,

– albo wyniki m_2 ostatnich n-prób utworzą flagę α_2,

$\vdots$

– albo wyniki m_k ostatnich n-prób utworzą flagę α_k,

nazywamy czekaniem na jedną z k flag i oznaczamy $\delta_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ albo $\delta_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{n}$, jeśli $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = \frac{1}{n}$.

Jeśli $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ oznacza zbiór wyników doświadczenia losowego $\delta_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$, to $\omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ wtedy i tylko wtedy, gdy:

– $\omega \in \{1, 2, \ldots, n\}^r$, gdzie $r \geqslant min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ i równocześnie

– albo końcówka o długości m_1 ciągu ω tworzy flagę α_1,

– albo końcówka o długości m_2 ciągu ω tworzy flagę α_2,

$\vdots$

– albo końcówka o długości m_k ciągu ω tworzy flagę α_k,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

i żaden inny podciąg kolejnych wcześniejszych wyrazów ciągu ω nie tworzy żadnej z flag $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Jeżeli $\omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$, to przez $J_j(\omega)$ oznaczamy liczbę wyrazów równych j w ciągu ω, gdzie $j = 1, 2, \ldots, n$. Jeżeli rozkład prawdopodobieństwa określamy regułą mnożenia, to jest on funkcją $p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k} : \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k} \longrightarrow \mathbb{R}$, gdzie:

$$p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\omega) = u_1^{J_1(\omega)} \cdot u_2^{J_2(\omega)} \cdot \ldots \cdot u_n^{J_n(\omega)}. \tag{4}$$

Funkcja $p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$, a para $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$ jest modelem doświadczenia losowego $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$. Prawdopodobieństwo w tej przestrzeni oznaczamy przez $P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$.

Z doświadczeniem losowym $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ zwiążmy zdarzenia:

$$A_j = \{\text{czekanie } \delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k} \text{ zakończy się uzyskaniem flagi } \alpha_j\} \quad \text{dla } j = 1, 2, \ldots, k.$$

W dalszym ciągu zdarzenie A_j oznaczamy przez $\{\ldots \alpha_j\}$, a jego prawdopodobieństwo przez $P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots \alpha_j)$.

W przypadku $n = 2$ czekanie $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ jest czekaniem na jedną z k serii sukcesów i porażek.

Liczba wykonanych prób w opisanym doświadczeniu losowym jest zmienną losową $T^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$. Nazywamy ją czasem czekania na jedną z flag $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Definicja 30. Rozważmy czekanie $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ oraz jego model, tj. przestrzeń probabilistyczną
$(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$. Jeżeli

$$P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots \alpha_1) = P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots \alpha_2),$$

to flagi α_1 i α_2 nazywamy jednakowo dobrymi w czekaniu $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ i oznaczamy

$$(\alpha_1 \approx \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Flagi α_1 i α_2 jednakowo dobre w czekaniu $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\alpha_2}$ nazywamy jednakowo dobrymi w punkcie $(u_1, \ldots, u_n)$ i oznaczamy

$$(\alpha_1 \approx \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Definicja 31. Rozważmy przestrzeń probabilistyczną $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$, która jest modelem czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$. Jeżeli

$$P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots \alpha_1) > P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots \alpha_2),$$

to flagę α_1 nazywamy lepszą od flagi α_2 w czekaniu $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ i oznaczamy

$$(\alpha_1 \gg \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Jeżeli flaga α_1 jest lepsza od flagi α_2 w czekaniu $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\alpha_2}$, to flagę α_1 nazywamy lepszą od flagi α_2 w punkcie $(u_1, \ldots, u_n)$ i oznaczamy

$$(\alpha_1 \gg \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Symbole

$$(\alpha_1 \approx \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)} \qquad \text{i} \qquad (\alpha_1 \gg \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}$$

oraz

$$(\alpha_1 \approx \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)} \qquad \text{i} \qquad (\alpha_1 \gg \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)}$$

można zastąpić symbolami

$$\alpha_1 \approx \alpha_2 \qquad \text{i} \qquad \alpha_1 \gg \alpha_2,$$

jednocześnie precyzując w modelu jakiego czekania rozważane są serie α_1 i α_2. Konieczność dokładnego określenia w modelu jakiego czekania rozważane są serie α_1 i α_2 ilustruje prosty przykład.

Przykład 4 Rozważmy dwie serie kolorów: $\alpha_1 = 12$ i $\alpha_2 = 21$. W modelu czekania δ^3_{12-21} jest $12 \approx 21$, ale w modelach czekań $\delta^3_{12-22-21}$ i $\delta^3_{12-11-21}$ jest odpowiednio $12 \gg 21$ i $21 \gg 12$.

3 Graf stochastyczny

3.1 Graf skierowany oraz jego ikoniczna prezentacja

Definicja 32. Grafem skierowanym albo digrafem nazywamy parę $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, gdzie $\mathcal{S} = \{w_1, w_2, w_3, \ldots, w_s\}$ jest dowolnym co najmniej dwuelementowym zbiorem ($s > 1$), a $\mathbf{Q}_{0-1} = [q_{jk}]$ jest niezerową macierzą kwadratową stopnia s o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, a więc macierzą zero-jedynkową. Elementy zbioru $\mathcal{S}$ nazywamy węzłami grafu, a macierz $\mathbf{Q}_{0-1}$ nazywamy macierzą przejść. Jeśli $q_{jk} = 1$, to parę (w_j, w_k), gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazywamy łukiem[1] i oznaczamy $w_j \to w_k$. Węzeł w_j nazywamy początkiem, a węzeł w_k – końcem tego łuku. Jeśli $q_{jj} = 1$, to łuk $w_j \to w_j$ nazywamy pętlą i oznaczamy przez l_{w_j}, a węzeł w_j nazywamy węzłem związanym z pętlą l_{w_j}.

Jeśli węzeł w_j jest początkiem tylko i wyłącznie pętli, to nazywamy go węzłem brzegowym. Zbiór wszystkich węzłów brzegowych grafu skierowanego nazywamy brzegiem grafu skierowanego i oznaczamy przez $V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$. Jeśli $\#V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}] = r$, to graf nazywamy grafem skierowanym o r węzłach brzegowych.

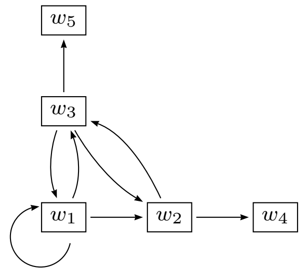
Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym. Interpretujmy węzły grafu jako punkty płaszczyzny. Jeżeli $q_{jk} = 1$, gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, to łuk $w_j \to w_k$ przedstawiamy jako zorientowany odcinek prostej lub krzywej o początku w punkcie w_j oraz końcu w punkcie w_k. W punkcie, który reprezentuje węzeł grafu będziemy (w prostokątnej ramce) umieszczać jego etykietę. Jeżeli w_j jest węzłem brzegowym, to pętlę $w_j \to w_j$ pomijamy. Mówimy tu o ikonicznej prezentacji grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$.

Rysunek 2 jest ikoniczną prezentacją grafu skierowanego $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, gdzie $\mathcal{S} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$ oraz

[1] W teorii grafów łuk nazywa się również krawędzią

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$$\mathbf{Q}_{0-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Rys. 2 Graf skierowany

3.2 Przejście na grafie skierowanym

Definicja 33. Niech w_j, w_k oraz $w_{j_1}, w_{j_2}, w_{j_3}, \ldots, w_{j_m}$ będą węzłami grafu skierowanego $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$. Każdy ciąg łuków $(w_j \to w_{j_1}, w_{j_1} \to w_{j_2}, w_{j_2} \to w_{j_3}, \ldots, w_{j_m} \to w_k)$ nazywamy przejściem z węzła w_j do węzła w_k i oznaczamy przez $w_j \to w_{j_1} \to w_{j_2} \to w_{j_3} \to \ldots \to w_{j_m} \to w_k$. Każdy łuk tego ciągu nazywamy łukiem przejścia. Jeśli węzeł jest początkiem lub końcem łuku przejścia, to nazywamy go węzłem przejścia. Długością przejścia nazywamy liczbę łuków przejścia.

Przejściem z węzła w_j do węzła w_k jest zatem każdy ciąg łuków taki, że początkiem pierwszego łuku jest węzeł w_j, końcem ostatniego jest węzeł w_k i początek każdego następnego łuku jest zarazem końcem poprzedniego.

Przejście $w_j \to w_{j_1} \to w_{j_2} \to w_{j_3} \to \ldots \to w_{j_m} \to w_k$, jeśli nie prowadzi to do nieporozumień, oznaczamy przez $w_j \rightsquigarrow w_k$, a jego długość przez $|w_j \rightsquigarrow w_k|$. Zbiór wszystkich przejść z węzła w_j do węzła w_k oznaczamy przez $\{w_j \rightsquigarrow w_k\}$. Jeśli istnieje przejście z węzła w_j do węzła w_k, to mówimy, że z węzła w_j można przejść do węzła w_k.

3.3 Graf skierowany właściwy

Definicja 34. Grafem skierowanym właściwym nazywamy graf skierowany $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ spełniający układ warunków:

(w1) $\forall w_{k_1}, w_{k_2} \in \mathcal{S} \ \ [(\forall w_j \in \mathcal{S} \ q_{jk_1} = q_{jk_2} = 0) \Longrightarrow w_{k_1} = w_{k_2}]$,

(istnieje co najwyżej jeden węzeł, który nie jest końcem żadnego łuku)

(w2) $\forall w_{j_1} \in \mathcal{S} \ \exists w_{j_2} \in \mathcal{S} \ w_{j_1} \neq w_{j_2} \ (q_{j_1 j_2} = 1 \vee q_{j_2 j_1} = 1)$,

(każdy węzeł jest początkiem lub końcem co najmniej jednego łuku)

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

(w3) $\exists w_j \in S \;\; \forall w_k \in \mathcal{S} \;\; [w_j \neq w_k \Rightarrow \;(\exists w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_m} \in \mathcal{S}$

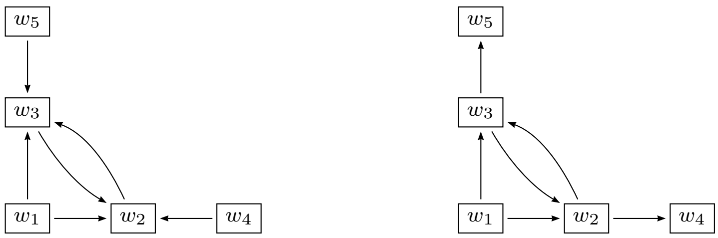
$$(q_{jj_1} \cdot q_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_m k} = 1))],$$

(istnieje co najmniej jeden węzeł, z którego można przejść do każdego innego węzła grafu)

(w4) $\forall w_j \in \mathcal{S} \;\; \exists w_k \in V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}] \; \exists w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_n} \in \mathcal{S} \;\; [q_{jj_1} \cdot q_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_n k} = 1].$

(z każdego węzła grafu można przejść do co najmniej jednego węzła brzegowego)

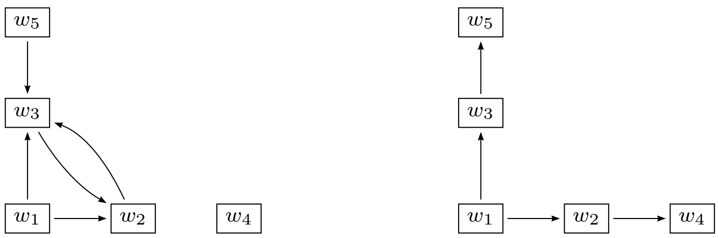
Graf na rysunku 3a) nie spełnia warunku (w1), a rysunek 3b) graf skierowany spełniający warunek (w1).



a) b)

Rys. 3

Rysunek 4a) przedstawia graf skierowany nie spełniający warunku (w2), a rysunek 4b) graf skierowany spełniający warunek (w2).

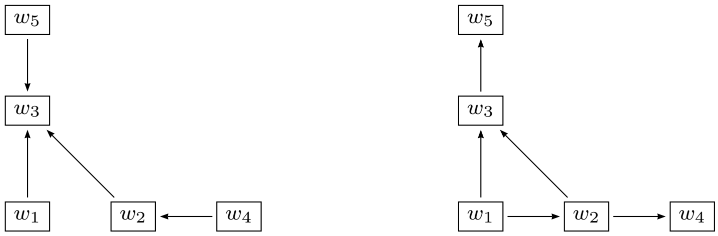


a) b)

Rys. 4

Graf z rysunku 5a) nie spełnia warunku (w3), bo z żadnego węzła nie da się przejść do każdego innego. Graf na rysunku 5b) spełnia warunek (w3), bo węzłem, o którym mowa jest w_1.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

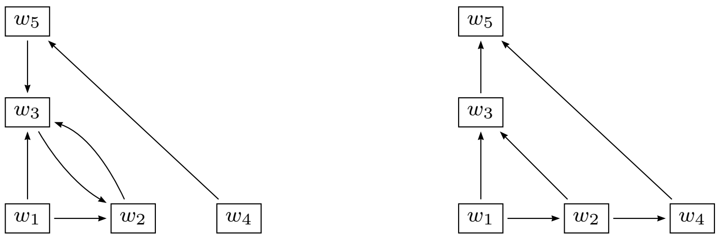


a) *b*)

Rys. 5

Graf skierowany nie spełniający warunku (w4) mamy na rysunku 6*a*). Żaden z węzłów tego grafu nie jest węzłem brzegowym. Na rysunku 6*b*) mamy graf spełniający warunek (w4).

Grafy skierowane właściwe mamy na rysunkach 2, 3*b*), 4*b*), 5*b*) i 6*b*).



a) *b*)

Rys. 6

3.4 Węzeł startowy

Definicja 35. Węzłem o własności początkowej na grafie skierowanym właściwym $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ nazywamy węzeł w_k spełniający warunek:

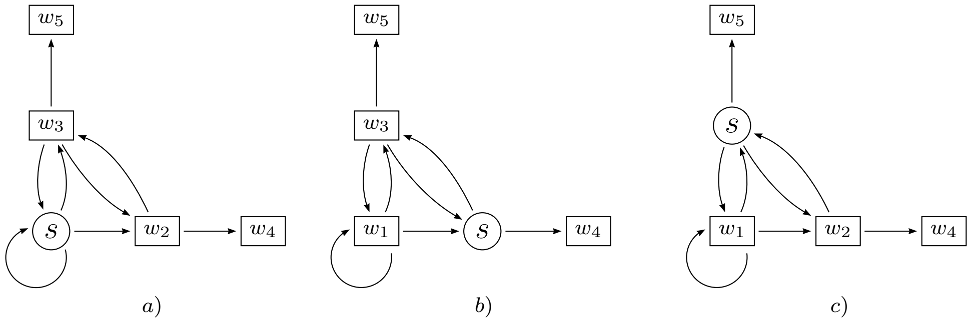
(w5) $\forall w_j \in \mathcal{S}, w_j \neq w_k\ \exists w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_m} \in \mathcal{S}\ [q_{kj_1} \cdot q_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_m j} = 1]$,

(z węzła w_k można przejść do każdego innego węzła grafu).

Węzłem startowym nazywamy dokładnie jeden z węzłów o własności początkowej, wyznaczony jednoznacznie przez kontekst, w którym graf powstawał. Węzeł startowy oznaczamy przez w_0, a w prezentacji ikonicznej przez okrąg z napisem start.

Istnienie co najmniej jednego węzła o własności początkowej na grafie skierowanym właściwym zapewnia warunek (w3). Graf z rysunku 2 ma trzy węzły o własności początkowej. Są to węzły w_1, w_2 i w_3. W zależności od kontekstu, możemy przyjąć $w_0 = w_1$ albo $w_0 = w_2$, albo $w_0 = w_3$. Otrzymujemy wówczas odpowiednio digrafy z rysunków 7*a*), 7*b*) i 7*c*).

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.



Rys. 7

Zauważmy, że węzeł startowy nie może być węzłem brzegowym.

Definicja 36. Graf skierowany $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, na którym istnieje węzeł startowy w_0 spełniający warunek

(w6) $\forall w_j \in \mathcal{S} \;\; [w_j \neq w_0 \Rightarrow q_{j0} = 0]$,

nazywamy grafem skierowanym bez powrotu na start.

Rysunek 3b) przedstawia graf bez powrotu na start (węzłem startowym jest węzeł w_1).

Definicja 37. Graf skierowany $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, na którym istnieje węzeł startowy w_0 spełniający warunek

(w7) $\exists w_j \in \mathcal{S} \;\; [w_j \neq w_0 \wedge q_{j0} = 1]$,

nazywamy grafem skierowanym z powrotem na start.

Na grafie skierowanym z powrotem na start węzeł startowy w_0 jest końcem co najmniej jednego łuku nie będącego pętlą. Rysunki 7a), 7b) i 7c) prezentują grafy z powrotem na start.

3.5 Cykl

Definicja 38. Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym właściwym i $w_j \in \mathcal{S}$. Każde przejście z węzła w_j do węzła w_j nazywamy cyklem mieszanym i oznaczamy przez c, każdy łuk tego przejścia nazywamy łukiem cyklu mieszanego. Długość tego przejścia nazywamy długością cyklu mieszanego i oznaczamy przez $|c|$. Każdy węzeł cyklu mieszanego, tj. węzeł będący początkiem lub końcem łuku cyklu mieszanego, nazywamy węzłem wewnętrznym cyklu mieszanego lub węzłem związanym z tym cyklem. W szczególności każde przejście $w_j \to w_j \to \ldots \to w_j$ nazywamy pętlą mieszaną.

Definicja 39. Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym właściwym i $w_j \in \mathcal{S}$. Każde przejście z węzła w_j do węzła w_j, które jest różnowartościowym ciągiem łuków grafu i w którym każde dwa różne łuki mają różne końce, i każde dwa różne łuki mają różne początki, nazywamy cyklem zwykłym.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Zauważmy, że każdy cykl zwykły jest cyklem mieszanym. Ponadto pętla jest cyklem zwykłym o długości 1.

W dalszej części pracy zamiast nazwy cykl zwykły piszemy krótko cykl. Natomiast w odniesieniu do cyklu mieszanego używamy pełnej nazwy.

Definicja 40. Cykl, którego jednym z węzłów wewnętrznych jest węzeł startowy, nazywamy cyklem podstawowym. Cykl nie będący cyklem podstawowym nazywamy cyklem wewnętrznym. Pętlę, która nie jest cyklem podstawowym, nazywamy pętlą wewnętrzną.

Definicja 41. Cykl mieszany, którego jednym z węzłów wewnętrznych jest węzeł startowy, nazywamy cyklem mieszanym podstawowym.

3.6 Trasa na grafie skierowanym

Definicja 42. Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym właściwym. Każde przejście z węzła startowego w_0 do węzła brzegowego w_j nazywamy trasą prowadzącą do węzła brzegowego w_j, a długość tego przejścia – długością trasy. Długość trasy t oznaczamy przez $|t|$. Węzeł będący początkiem lub końcem łuku trasy nazywamy węzłem trasy.

Zbiór wszystkich tras grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ oznaczamy przez $B[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$. Zbiór wszystkich tras prowadzących do węzła brzegowego w_j oznaczamy przez $B_{w_j}[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ lub krótko B_{w_j}. W celu wyróżnienia pewnego węzła trasy $w_0 \rightsquigarrow w_j$ stosujemy zapis $w_0 \rightsquigarrow w_k \rightsquigarrow w_j$, gdzie $w_0 \rightsquigarrow w_k$ jest przejściem z węzła startowego do węzła w_k, $w_k \rightsquigarrow w_j$ jest przejściem z węzła w_k do węzła brzegowego w_j, a w_k jest wyróżnionym węzłem tej trasy. Analogicznie, chcąc wyróżnić pewien łuk bądź ciąg kolejnych łuków trasy $w_0 \rightsquigarrow w_j$, stosujemy zapis $w_0 \rightsquigarrow w_{k_1} \rightarrow w_{k_2} \rightsquigarrow w_j$, gdzie $w_{k_1} \rightarrow w_{k_2}$ jest wyróżnionym łukiem trasy oraz $w_0 \rightsquigarrow w_{k_1} \rightarrow \ldots \rightarrow w_{k_n} \rightsquigarrow w_j$, gdzie $w_{k_1} \rightarrow \ldots \rightarrow w_{k_n}$ jest wyróżnionym ciągiem kolejnych łuków trasy. W szczególności, jeśli ciąg kolejnych łuków trasy tworzy cykl $c = w_{k_1} \rightarrow \ldots \rightarrow w_{k_1}$, to trasę $w_0 \rightsquigarrow w_j = w_0 \rightsquigarrow w_{k_1} \rightarrow \ldots \rightarrow w_{k_1} \rightsquigarrow w_j$ zapisujemy $w_0 \rightsquigarrow c \rightsquigarrow w_j$, a węzeł w_{k_1} nazywamy pierwszym węzłem trasy związanym z cyklem c.

Definicja 43. Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym właściwym, t dowolną trasą, c dowolnym cyklem (cyklem mieszanym), a l dowolną pętlą na tym grafie. Jeżeli pewien podciąg kolejnych łuków trasy t tworzy cykl (cykl mieszany) c, to mówimy, że cykl (cykl mieszany) c jest związany z trasą t. W przeciwnym przypadku mówimy, że cykl (cykl mieszany) c nie jest związany z trasą t. Jeżeli pewien łuk trasy t tworzy pętlę l, to mówimy, że pętla l jest związana z trasą t. W przeciwnym przypadku mówimy, że pętla l nie jest związana z trasą t.

3.7 Rodzaje tras na grafie skierowanym

Definicja 44. Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym właściwym.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[trasa elementarna] Trasę, z którą nie jest związany żaden cykl, nazywamy trasą elementarną.

[trasa prosta] Trasę, z którą są związane cykle podstawowe, a jednocześnie nie są związane cykle wewnętrzne, nazywamy trasą prostą.

[trasa półprosta] Trasę, z którą związane są pętle wewnętrzne i jednocześnie nie są związane ani cykle podstawowe, ani inne cykle wewnętrzne, nazywamy trasą półprostą.

[trasa półzłożona] Trasę, z którą związane są cykle wewnętrzne a jednocześnie nie są związane cykle podstawowe, nazywamy trasą półzłożoną.

[trasa złożona] Trasę, z którą związane są jednocześnie cykle wewnętrzne i podstawowe nazywamy trasą złożoną.

Zauważmy, że każda trasa półprosta jest zarazem trasą półzłożoną.

3.8 Graf stochastyczny

Definicja 45. Macierz kwadratową $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$, gdzie $j, k = 0, 1, 2, \ldots, s-1$ oraz $s \in \mathbb{N}_1$, nazywamy macierzą stochastyczną stopnia s, jeśli:

$$\forall j, k \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\} \ [p_{jk} \in \langle 0, 1 \rangle]$$

oraz

$$\forall j \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\} \ [\sum_{k=0}^{s-1} p_{jk} = 1].$$

Macierzą stochastyczną jest zatem każda macierz kwadratowa o wyrazach nieujemnych, w której suma wyrazów w każdym wierszu jest równa 1. Macierzami stochastycznymi są następujące macierze:

$$\mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathbf{Q}$ będzie macierzą stochastyczną stopnia s. Rozważmy przekształcenie f określone na zbiorze wszystkich macierzy stochastycznych, o wartościach w zbiorze wszystkich niezerowych macierzy zero-jedynkowych, które macierzy stochastycznej $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$ przyporządkowuje macierz zero-jedynkową $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}_{0-1} = [q_{jk}]$, gdzie

$$q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p_{jk} > 0, \\ 0, & \text{gdy } p_{jk} = 0. \end{cases}$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Macierz $f(\mathbf{Q})$ powstaje z macierzy $\mathbf{Q}$ poprzez zastąpienie każdego jej niezerowego wyrazu liczbą 1.

Definicja 46. Niech $\mathcal{S}$ będzie niepustym, s-elementowym zbiorem, a $\mathbf{Q}$ macierzą stochastyczną stopnia s. Jeżeli para $[\mathcal{S}, f(\mathbf{Q})]$ jest grafem właściwym, to parę $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ nazywamy grafem stochastycznym.

Dla powyższych macierzy stochastycznych $\mathbf{Q_1}$ i $\mathbf{Q_2}$ mamy:

$$f(\mathbf{Q_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f(\mathbf{Q_2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathcal{S}_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ oraz $\mathcal{S}_2 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Para $[\mathcal{S}_1, f(\mathbf{Q_1})]$ nie jest grafem skierowanym właściwym, a więc para $[\mathcal{S}_1, \mathbf{Q_1}]$ nie jest grafem stochastycznym. Para $[\mathcal{S}_2, f(\mathbf{Q_2})]$ jest grafem skierowanym właściwym, zatem para $[\mathcal{S}_2, \mathbf{Q_2}]$ jest grafem stochastycznym.

Pojęcia wprowadzone dla grafu skierowanego właściwego odnoszą się także do grafu stochastycznego.

Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ będzie grafem stochastycznym i $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{s-1}\}$. Rozważmy wektor stochastyczny $\vec{v} = [1, 0, \ldots, 0]$ o s współrzędnych. Trójka $[\mathcal{S}, \vec{v}, \mathbf{Q}]$ jest inną prezentacją algebraiczną grafu stochastycznego $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Dzięki wprowadzeniu wektora $\vec{v}$ do pary $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ odkrywamy, że taka algebraiczna prezentacja grafu stochastycznego jest równocześnie algebraiczną prezentacją szczególnego jednorodnego łańcucha Markowa. Chodzi o takie łańcuchy Markowa, które są przedmiotem niniejszej pracy.

3.9 Waga łuku, waga przejścia i waga zbioru tras na grafie stochastycznym

Definicja 47. Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ będzie grafem stochastycznym, gdzie $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$ oraz niech $w_j, w_k \in \mathcal{S}$. Jeżeli $\mathbf{Q}(w_j, w_k) = p_{jk} > 0$, to liczbę p_{jk} nazywamy wagą łuku $w_j \to w_k$. Jeśli z jest przejściem na grafie $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, to iloczyn wag kolejnych łuków tego przejścia nazywamy wagą przejścia z i oznaczamy przez $w(z)$. Iloczyn wag kolejnych łuków trasy t nazywamy wagą trasy t i oznaczamy przez $w(t)$. Jeśli B jest dowolnym zbiorem przejść na grafie stochastycznym $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, to liczbę

$$w(B) = \sum_{t \in B} w(t)$$

nazywamy wagą zbioru B.

Niech $w_j \in \mathcal{S} \setminus V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Dla każdego grafu stochastycznego $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ suma wag wszystkich przejść z węzła w_j do węzłów brzegowych jest równa 1.

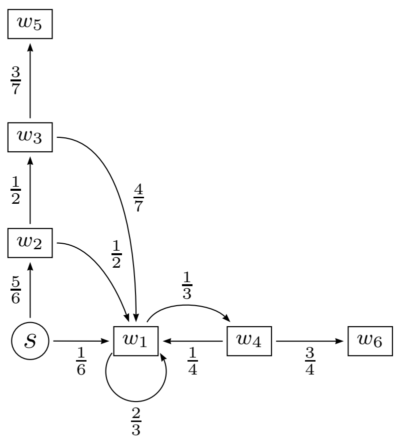
Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

3.10 Prezentacja ikoniczna grafu stochastycznego

Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ będzie grafem stochastycznym, gdzie $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}\}$ i niech $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$. Rozważmy ikoniczną prezentację grafu skierowanego $[\mathcal{S}, f(\mathbf{Q})]$ i przypiszmy każdemu łukowi $w_j \to w_k$ na tym grafie wagę p_{jk}. Graf z tak przypisanymi liczbami dodatnimi jest prezentacją ikoniczną grafu stochastycznego $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Para $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, gdzie $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ oraz

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

jest grafem stochastycznym. Jego prezentację ikoniczną przedstawia rysunek 8.



Rys. 8 Prezentacja ikoniczna grafu stochastycznego

W teorii grafów rozważa się digrafy, których łukom przypisane są liczby rzeczywiste (niekoniecznie dodatnie) jako ich wagi. Tego typu grafy nazywa się grafami ważonymi (zob.[7] oraz [40]). Graf stochastyczny, jako digraf z przypisaną każdemu łukowi liczbą dodatnią, jest grafem ważonym.

3.11 Równoważność grafów stochastycznych

Definicja 48. Mówimy, że grafy stochastyczne $[\mathcal{S}_1, \mathbf{Q_1}]$ i $[\mathcal{S}_2, \mathbf{Q_2}]$ są równoważne, jeśli ist-
nieje
bijekcja $g\colon \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$ spełniająca warunek

$$\forall w_{j_1}, w_{j_2} \in \mathcal{S}_1, w_{k_1}, w_{k_2} \in \mathcal{S}_2 \quad [(g(w_{j_1}) = w_{k_1} \wedge g(w_{j_2}) = w_{k_2}) \\ \Rightarrow \mathbf{Q_1}(w_{j_1}, w_{j_2}) = \mathbf{Q_2}(w_{k_1}, w_{k_2})].$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Mówimy, że funkcja g zachowuje wagę łuków.

4 Jednorodny łańcuch Markowa o skończonym zbiorze stanów i niepustym zbiorze stanów pochłaniających jako szczególne doświadczenie losowe o losowej liczbie etapów

4.1 Definicje jednorodnego łańcucha Markowa

Definicja 49. Ciąg zmiennych losowych $(X_n)_{n=0}^{\infty}$, określonych w tej samej przestrzeni probabilistycznej $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ i których wartości należą do przeliczalnego zbioru $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}$, nazywamy łańcuchem Markowa wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $n \in \mathbb{N}$ i każdego ciągu $x_{k_0}, x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n-1}}, x_k, x_j \in \mathcal{S}$ mamy

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \ldots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) \\ &\quad = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k), \end{aligned} \tag{5}$$

jeśli tylko $P(X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \ldots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) > 0$. Jeżeli ponadto prawa strona równości (5) nie zależy od n, to łańcuch Markowa nazywamy jednorodnym. Liczby ze zbioru $\mathcal{S}$ nazywamy stanami.

Jest to przyjęta w literaturze probabilistycznej definicja jednorodnego łańcucha Markowa (zob. m. in. [21], [5], [1]).

Z pewnych powodów przyjmujemy w pracy inną definicję (zaproponowaną w [50], s. 322. oraz w [?], s. 376.), w myśl której jednorodny łańcuch Markowa jest szczególnym ciągiem doświadczeń losowych, a więc tym samym ciągiem przestrzeni probabilistycznych. Definicja, o której wspominamy, umożliwia odkrywanie pewnych narzędzi badania łańcuchów Markowa. Jednocześnie ograniczamy się do łańcuchów Markowa o skończonym zbiorze $\mathcal{S}$ stanów i ustalonym rozkładzie zmiennej losowej X_0.

Definicja 50. Niech $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, $\Omega_B \subset \Omega_{\mathcal{S}}$ oraz $\Omega_B \neq \Omega_{\mathcal{S}}$. Załóżmy, że każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o s-modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Niech ponadto δ_* będzie doświadczeniem losowym o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_*)$. Jednorodnym łańcuchem Markowa o $(r+1)$ stanach (są nimi elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$) nazywamy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe δ:

– najpierw (jest to etap wstępny) przeprowadzane jest doświadczenie δ_*,

– jeśli którykolwiek etap zakończy się wynikiem ze zbioru Ω_B, to doświadczenie δ się kończy,

– jeśli dany etap zakończy się wynikiem ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap jest doświadczeniem δ_j.

Elementy zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$ nazywamy stanami, a elementy zbioru Ω_B stanami pochłaniającymi.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Jednorodny łańcuch Markowa jest więc doświadczeniem o losowej liczbie etapów, przy czym wyniki każdego etapu są elementami zbioru $\Omega_{\mathcal{S}}$ i model każdego etapu (z wyjątkiem etapu wstępnego) zależy tylko od wyniku etapu poprzedniego (por. [11], s. 316-317.).

[terminologia] W teorii łańcuchów Markowa przyjmuje się, że kolejne etapy doświadczenia przebiegającego etapami są przeprowadzane w kolejnych jednostkach czasu. Koniec n-tej jednostki czasu ($n \in \mathbb{N}_0$) nazywamy chwilą n. Jeżeli n-ty etap zakończy się wynikiem ω_j, to mówimy, że w chwili n pewien układ fizyczny Σ znalazł się w stanie ω_j. Doświadczenie kończy się, ilekroć układ Σ znajdzie się w stanie pochłaniającym. Zakładamy przy tym, że ilekroć układ Σ znajdzie się w chwili n w stanie pochłaniającym, to pozostaje w tym stanie w każdej chwili następnej.

4.2 Algebraiczna prezentacja jednorodnego łańcucha Markowa

Prezentacją algebraiczną skończonej przestrzeni probabilistycznej (Ω, p), gdzie $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, jest wektor $[p(\omega_0), p(\omega_1), p(\omega_2), \ldots, p(\omega_r)]$. Jest to wektor stochastyczny.

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa o $(r+1)$ stanach w sensie definicji 50. Prezentacją modelu doświadczenia δ_* jest wektor

$$\vec{v_*} = [p_*(\omega_0), p_*(\omega_1), \ldots, p_*(\omega_r)].$$

Z uwagi na to, że δ_* jest etapem wstępnym, wektor ten nazywamy wektorem początkowym.

Jeżeli układ Σ w chwili n znajdzie się w stanie ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap łańcucha Markowa jest doświadczeniem δ_j o modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Algebraiczną prezentacją przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$, a zarazem rozkładu p_j jest wektor

$$\vec{v_j} = [p_{j0}, p_{j1}, \ldots, p_{jr}], \quad \text{gdzie } p_{jk} = p_j(\omega_k) \text{ dla } \omega_k \in \Omega_{\mathcal{S}}.$$

Jeśli $\omega_j \in \Omega_B$, to z przyjętych wcześniej umów wynika, że

$$p_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } j = k, \\ 0, & \text{gdy } j \neq k. \end{cases}$$

Przyjmujemy więc, że dla $\omega_j \in \Omega_B$ współrzędna p_{jj} wektora $\vec{v_j}$ jest równa 1, a pozostałe współrzędne są równe 0.

Ciąg wektorów $(\vec{v_0}, \vec{v_1}, \ldots, \vec{v_r})$ można utożsamiać z macierzą stochastyczną $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$, gdzie kolejne wyrazy j-tego wiersza tej macierzy są kolejnymi współrzędnymi wektora $\vec{v_j}$. Trójka $[\Omega_{\mathcal{S}}, \vec{v_*}, \mathbf{Q}]$ jest algebraiczną prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa.

W pracy zajmujemy się jednorodnymi łańcuchami Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \vec{v_*}, \mathbf{Q}]$, w których $\vec{v_*} = [1, 0, \ldots, 0]$, a więc łańcuchami, których pierwszym etapem jest doświadczenie

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

δ_0. Przy tej umowie – w dalszej części pracy – trójka $[\Omega_\mathcal{S}, \vec{v_*}, \mathbf{Q}]$ jest jednoznacznie określona przez parę $[\Omega_\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. W omawianym przypadku stan ω_0 nazywamy stanem początkowym.

4.3 Ruletkowa prezentacja jednorodnego łańcucha Markowa

Rozważmy jednorodny łańcuch Markowa $[\Omega_\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Każdemu elementowi ω_j ze zbioru $\Omega_\mathcal{S} \setminus \Omega_B$ odpowiada doświadczenie losowe δ_j o modelu probabilistycznym $(\Omega_\mathcal{S}, p_j)$. Powróćmy do ruletkowej prezentacji skończonej przestrzeni probabilistycznej (zob. s. 11.). Każde doświadczenie losowemu δ_j ma swoją ruletkową prezentację. Załóżmy, że doświadczeniu losowemu δ_j odpowiada ruletka R_j. Etykiety sektorów każdej z ruletek są elementami zbioru stanów $\Omega_\mathcal{S} = \{\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_r\}$. Rozważmy następujące wieloetapowe doświadczenie losowe:

– doświadczenie rozpoczyna się od losowania sektora za pomocą ruletki R_0,

– ilekroć któryś z etapów zakończy się wynikiem ω_j, gdzie $\omega_j \in \Omega_B$, doświadczenie się kończy,

– jeśli dany etap zakończy się wynikiem ω_j i $\omega_j \notin \Omega_B$, to następny etap jest losowaniem sektora za pomocą ruletki R_j.

Opisane wyżej doświadczenie losowe nazywamy ruletkową prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa $[\Omega_\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$.

4.4 Ikoniczna prezentacja jednorodnego łańcucha Markowa

Niech $[\Omega_\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ będzie jednorodnym łańcuchem Markowa. Elementy zbioru $\Omega_\mathcal{S}$ interpretujemy jako punkty płaszczyzny i nazywamy je węzłami, a zbiór węzłów oznaczamy przez $\mathcal{S}$. Węzeł odpowiadający stanowi ω_j oznaczamy przez w_j. Wówczas $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, \dots, w_r\}$. Węzeł w_0 reprezentujący stan początkowy ω_0 nazywamy węzłem startowym. Każdy węzeł reprezentujący stan pochłaniający nazywamy węzłem brzegowym, a zbiór wszystkich węzłów brzegowych nazywamy brzegiem grafu. Jeżeli $p_{jk} > 0$, to węzeł w_j łączymy zorientowanym odcinkiem prostej lub krzywej z węzłem w_k. Ten odcinek nazywamy łukiem. Przyporządkowując każdemu łukowi liczbę p_{jk} dostajemy digraf ważony $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, który nazywamy grafem jednorodnego łańcucha Markowa $[\Omega_\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. W literaturze probabilistycznej nazywa się go grafem Engla albo grafem englowskim. Ten graf jest ikoniczną prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa $[\Omega_\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$.

Każdy jednorodny łańcuch Markowa o skończonym zbiorze $\Omega_\mathcal{S}$ stanów ma swój graf Engla i każdy graf Engla (a zatem i każdy graf stochastyczny w sensie definicji 46) jest ikoniczną prezentacją pewnego łańcucha Markowa.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

4.5 Interpretacja przebiegu jednorodnego łańcucha Markowa jako błądzenie po grafie stochastycznym tego łańcucha

Niech $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ będzie algebraiczną prezentacją jednorodnego łańcucha Markowa o $(r+1)$ stanach. Para $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ jest jego grafem Engla. W pracach [8] i [10] Arthur Engel zaproponował następującą interpretację przebiegu jednorodnego łańcucha Markowa jako ciągu doświadczeń losowych.

Na początku (przed przeprowadzeniem pierwszego etapu) stawiamy pionek w węźle startowym w_0 grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Jeśli etap pierwszy zakończy się wynikiem w_j, to pionek przesuwamy do węzła w_j. Jeśli po etapie $(n-1)$-szym pionek znalazł się w węźle w_j i n-ty etap zakończy się wynikiem w_k, to pionek przesuwamy z węzła w_j do węzła w_k $(n > 1)$. Błądzenie pionka kończy się wraz z jego dotarciem na brzeg grafu. W tej englowskiej interpretacji jednorodnego łańcucha Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ układ Σ znajduje się w chwili n w stanie ω_j wtedy i tylko wtedy, gdy pionek po n-tym etapie znajdzie się w węźle w_j. Czas trwania jednorodnego łańcucha Markowa $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ (odmierzany liczbą etapów) staje się w tej interpretacji czasem błądzenia losowego po grafie $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ (odmierzanym długością trasy błądzenia).

4.6 Czekanie na jedną z k flag jako jednorodny łańcuch Markowa

Przykład 5 (czekanie $\delta^{\frac{1}{3}}_{01-11}$ jako jednorodny łańcuch Markowa) Rozważmy czekanie $\delta^{\frac{1}{3}}_{01-11}$. Mamy tutaj

$$\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, 0, 1, 01, 11\} \qquad \text{i} \qquad \Omega_B = \{01, 11\}.$$

Przyjmijmy umowę, że $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 01$ i $\omega_4 = 11$. Stanom ω_0, ω_1, ω_2 odpowiadają doświadczenia δ_0, δ_1 i δ_2. Prezentacją modeli doświadczeń δ_0, δ_1 i δ_2 są wektory:

$$\vec{v_0} = [0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0], \qquad \vec{v_1} = [0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 0] \qquad \text{i} \qquad \vec{v_2} = [0, \tfrac{2}{3}, 0, 0, \tfrac{1}{3}].$$

Przebieg czekania $\delta^{\frac{1}{3}}_{01-11}$ interpretujemy w następujący sposób:

– najpierw przeprowadzane jest doświadczenie δ_0,

– jeśli którykolwiek etap zakończy się wynikiem ze zbioru Ω_B, to doświadczenie $\delta^{\frac{1}{3}}_{01-11}$ się kończy,

– jeśli dany etap zakończy się wynikiem ω_j, gdzie $j = 0, 1, 2$, to następny etap jest doświadczeniem δ_j.

Czekanie $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ na jedną z k flag jest, w myśl definicji 50, jednorodnym łańcuchem Markowa. Stanami czekania są wszystkie flagi i wszystkie początki wszystkich flag oraz stan ω_0 (stan początkowy). Stanami pochłaniającymi są tu serie $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ (traktowane jako stany czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$). Niech $\Omega_{\mathcal{S}}$ oznacza zbiór wszystkich stanów

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

czekania. Niech p_{jk} oznacza prawdopodobieństwo, z jakim czekanie znajdzie się po danej próbie w stanie ω_k, skoro po próbie poprzedniej było ono w stanie ω_j. Rozważmy funkcję $\mathbf{Q}$ taką, że $\mathbf{Q}(\omega_j, \omega_k) = p_{jk}$ dla $\omega_j, \omega_k \in \Omega_{\mathcal{S}}$. Para $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ jest algebraiczną prezentacją czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$, natomiast para $[\mathcal{S}, f(\mathbf{Q})]$ spełnia warunki (w1)-(w4) w definicji 34 (zob. s. 21. i s. 26.), a więc graf Engla $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ tego czekania jest grafem stochastycznym, który nazywamy grafem czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$.

Doświadczenia losowe o losowej liczbie etapów, o których mowa w pracy, są (w myśl definicji 50) jednorodnymi łańcuchami Markowa. Jednorodny łańcuch Markowa jest zatem w tej pracy rozumiany jako szczególny ciąg doświadczeń losowych, a ten jest – w sensie probabilistycznym – ciągiem przestrzeni probabilistycznych jako modeli tych doświadczeń.

Jeżeli $\Omega_{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}$ (jeżeli stany są liczbami), to opisany łańcuch Markowa jako ciąg doświadczeń losowych jest szczególnym ciągiem zmiennych losowych, spełniającym warunek (5), a więc jest jednorodnym łańcuchem Markowa w sensie definicji 49. Zauważmy bowiem, że w przestrzeni probabilistycznej - określonej regułami mnożenia - mamy

$$P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \ldots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0})$$
$$= \frac{p_{kj} \cdot p_{k_{(n-1)}k} \cdot p_{k_{(n-2)}k_{(n-1)}} \cdots p_{k_0 k_1}}{p_{k_{(n-1)}k} \cdot p_{k_{(n-2)}k_{(n-1)}} \cdots p_{k_0 k_1}} = p_{kj} = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k).$$

4.7 Przestrzeń probabilistyczna jako model czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ i jako przestrzeń probabilistyczna indukowana przez graf stochastyczny

Definicja 51. Niech Ω_G będzie zbiorem wszystkich tras na grafie stochastycznym $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, a p_G funkcją, która każdej trasie przypisuje jej wagę. Funkcja p_G jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_G. Parę (Ω_G, p_G) nazywamy przestrzenią probabilistyczną indukowaną przez graf.

Czekanie $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ jest jednorodnym łańcuchem Markowa i jego przebieg możemy interpretować jako błądzenie losowe po grafie stochastycznym tego czekania. Uwzględniając tę englowską interpretację, wynik tego czekania możemy utożsamiać z trasą na grafie stochastycznym tego czekania.

Z faktu, że każdemu stanowi czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ odpowiada dokładnie jeden węzeł grafu czekania wynika, że każdemu wynikowi czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ odpowiada dokładnie jedna trasa grafu czekania. Istnieje więc bijekcja ze zbioru stanów czekania na zbiór węzłów grafu czekania oraz bijekcja ze zbioru wyników czekania na zbiór tras grafu czekania.

Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$ i przestrzeń probabilistyczna (Ω_G, p_G) indukowana przez graf stochastyczny czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ są równoważne (w sensie def. 5).

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Dalsze wnioskowania i rachunki są prowadzone w przestrzeni probabilistycznej (Ω_G, p_G). W tej przestrzeni probabilistycznej zdarzenie $\{\dots\alpha_j\}$ jest zbiorem tych tras grafu czekania, które prowadzą do węzła α_j. Mamy zatem

$$P(\dots\alpha_j) = \sum_{t\in\{\dots\alpha_j\}} w(t). \tag{6}$$

Zdarzenie $\{\dots\alpha_j\}$ jest na ogół przeliczalnym podzbiorem zbioru Ω_G, a zatem jego prawdopodobieństwo jest sumą pewnego szeregu liczbowego.

Narzędziami obliczania prawdopodobieństw zdarzeń $\{\dots\alpha_j\}$ są m.in. algorytm pochłaniania, englowskie redukcje grafów i reguła Masona. W pracy zaprezentowane zostaną również inne – ale także oparte na grafie stochastycznym – metody obliczania tych prawdopodobieństw.

5 Narzędzia badania modeli łańcuchów Markowa

5.1 Algorytm pochłaniania

Niech $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ będzie grafem stochastycznym oraz $V_1 \subset V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Symbol $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ oznacza wagę zbioru wszystkich przejść z węzła w_j do węzłów zbioru V_1. Odwołując się do interpretacji przebiegu łańcucha Markowa jako błądzenia po grafie stochastycznym tego łańcucha powiemy, że $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ jest prawdopodobieństwem dotarcia błądzącego po grafie pionka z węzła w_j do jednego z węzłów brzegowych ze zbioru V_1. Układ warunków:

1) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = 1$ dla $w_j \in V_1$,

2) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = 0$ dla $w_j \in V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}] \setminus V_1$,

3) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = \sum_{w_k} p_{jk} \cdot p_{k\rightsquigarrow V_1}$ dla $w_j \notin V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich węzłach dla których $p_{jk} > 0$,

nazywamy algorytmem pochłaniania (zob. [?], s. 398-399.). Ten algorytm pozwala obliczyć prawdopodobieństwo $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ poprzez rozwiązanie pewnego układu równań liniowych.

Niech $P(\dots w_{j_0})$ oznacza prawdopodobieństwo dotarcia do węzła brzegowego w_{j_0}. Przyjmując $V_1 = \{w_{j_0}\}$ i stosując algorytm pochłaniania otrzymujemy układ równań. Rozwiązując ten układ równań dostajemy wartość prawdopodobieństwa $p_{0\rightsquigarrow\{w_{j_0}\}} = P(\dots w_{j_0})$, która jest sumą wag wszystkich tras prowadzących do węzła brzegowego w_{j_0}.

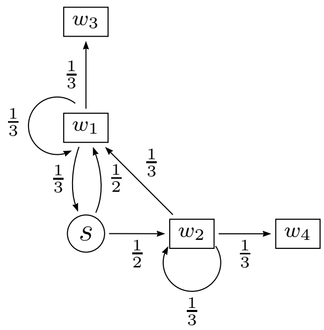
Przykład 6 Rozważmy graf stochastyczny z rysunku 9. Przyjmując $V_1 = \{w_3\}$ i stosu-

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

jąc algorytm pochłaniania, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} p_{0\rightsquigarrow\{w_3\}} = \frac{1}{2}\cdot p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} + \frac{1}{2}\cdot p_{2\rightsquigarrow\{w_3\}}, \\ p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} = \frac{1}{3}\cdot p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} + \frac{1}{3}\cdot p_{0\rightsquigarrow\{w_3\}} + \frac{1}{3}\cdot p_{3\rightsquigarrow\{w_3\}}, \\ p_{2\rightsquigarrow\{w_3\}} = \frac{1}{3}\cdot p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} + \frac{1}{3}\cdot p_{2\rightsquigarrow\{w_3\}} + \frac{1}{3}\cdot p_{4\rightsquigarrow\{w_3\}}, \\ p_{3\rightsquigarrow\{w_3\}} = 1, \\ p_{4\rightsquigarrow\{w_3\}} = 0, \end{cases}$$

z którego wynika, że $p_{0\rightsquigarrow\{w_3\}} = P(\dots w_3) = \dfrac{3}{5}$.



Rys. 9

5.2 Algorytm Conway'a

Niech $\delta_{\alpha-\beta}$ będzie czekaniem na jedną z dwu serii orłów i reszek, oraz k i l bedą długościami serii odpowiednio α i β. Niech $\alpha^{(m)}$, $\beta^{(m)}$ oznaczają początki o długości m odpowiednio serii α i β, a $\alpha_{(m)}$, $\beta_{(m)}$ - końcówki o długości m odpowiednio serii α, β. Zdefiniujmy zbiory

$$A_\alpha = \{m \in \{1,2,3,\dots,k\} : \alpha_{(m)} = \alpha^{(m)}\},$$

$$A_\beta = \{m \in \{1,2,3,\dots,min\{k,l\}\} : \alpha_{(m)} = \beta^{(m)}\},$$

$$B_\beta = \{m \in \{1,2,3,\dots,l\} : \beta_{(m)} = \beta^{(m)}\},$$

$$B_\alpha = \{m \in \{1,2,3,\dots,min\{k,l\}\} : \beta_{(m)} = \alpha^{(m)}\}.$$

oraz następujące sumy

$$\alpha:\alpha = \sum_{j\in A_\alpha} 2^j, \qquad \alpha:\beta = \sum_{j\in A_\beta} 2^j,$$

$$\beta:\beta = \sum_{j\in B_\beta} 2^j, \qquad \beta:\alpha = \sum_{j\in B_\alpha} 2^j.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Twierdzenie 1. [algorytm Conway'a, wzór Conway'a] W przestrzeni probabilistycznej doświadczenia $\delta_{\alpha-\beta}$ prawdziwy jest wzór

$$\frac{P(\ldots\beta)}{P(\ldots\alpha)} = \frac{\alpha:\alpha-\alpha:\beta}{\beta:\beta-\beta:\alpha},$$

który nazywamy algorytmem lub wzorem Conway'a[2].

Uwaga. Z powyższego wzoru wynika, że jeżeli

$$\mu := \frac{\alpha:\alpha-\alpha:\beta}{\beta:\beta-\beta:\alpha},$$

to

$$\mu > 1 \Leftrightarrow \beta \gg \alpha,$$
$$\mu = 1 \Leftrightarrow \alpha \approx \beta,$$
$$\mu < 1 \Leftrightarrow \alpha \gg \beta.$$

Przykład 7. Niech $\alpha = 101010$ i $\beta = 110101$. Zauważmy, że $\alpha_{(1)} = 0 \neq 1 = \alpha^{(1)}$, czyli $1 \notin A_\alpha$. Analogicznie

$$\left.\begin{array}{r}101010\\101010\end{array}\right\} \Rightarrow\ 2 \in A_\alpha, \qquad \left.\begin{array}{r}101010\\101010\end{array}\right\} \Rightarrow\ 3 \notin A_\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{r}101010\\101010\end{array}\right\} \Rightarrow\ 4 \in A_\alpha, \qquad \left.\begin{array}{r}101010\\101010\end{array}\right\} \Rightarrow\ 5 \notin A_\alpha,$$

$$\left.\begin{array}{r}101010\\101010\end{array}\right\} \Rightarrow\ 6 \in A_\alpha.$$

Stąd

$$A_\alpha = \{2, 4, 6\},$$

więc

$$\alpha:\alpha = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 84.$$

W ten sam sposób otrzymujemy wartości

$$\alpha:\beta = 0, \qquad \beta:\beta = 66, \qquad \beta:\alpha = 42,$$

zatem

$$\frac{\alpha:\alpha-\alpha:\beta}{\beta:\beta-\beta:\alpha} = \frac{84-0}{66-42} = \frac{21}{6}.$$

[2] wzór ten odkrył John Horton Conway; dowód poprawności wzoru Conway'a został przedstwiony w pracy [54];

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Ponieważ

$$\frac{P(\ldots\beta)}{P(\ldots\alpha)} = \frac{21}{6} \quad \text{oraz} \quad P(\ldots\beta) = 1 - P(\ldots\alpha),$$

to

$$P(\ldots\alpha) = \frac{6}{27}, \quad P(\ldots\beta) = \frac{21}{27}.$$

Wynika stąd, że $110101 \gg 101010$.

5.3 Algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym

Wróćmy do englowskiej interpretacji przebiegu jednorodnego łańcucha Markowa $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ jako błądzenia po grafie stochastycznym tego łańcucha. Niech T_{w_j} oznacza czas błądzenia rozpoczynającego się w węźle w_j. Zmienna losowa T_{w_j} każdemu przejściu z węzła w_j na brzeg grafu przypisuje jego długość (liczbę łuków przejścia). Załóżmy, że dla każdego węzła w_j istnieje $E(T_{w_j})$. Niech $E(T_{w_j}) = e_{w_j}$. Układ warunków:

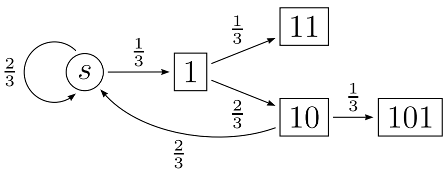
1) $e_{w_j} = 0 \quad \text{dla } w_j \in V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$,

2) $e_{w_j} = 1 + \sum\limits_{w_k} p_{jk} e_{w_k} \quad$ dla $w_j \notin V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich węzłach dla których $p_{jk} > 0$,

nazywamy algorytmem średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym z niepustym brzegiem (zob. [50], s. 305-306.).

Liczba wykonanych prób w doświadczeniu losowym $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ jest zmienną losową $T^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$. Obliczanie wartości oczekiwanej zmiennej losowej $T^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ bezpośrednio z definicji jest bardzo uciążliwe. Czas błądzenia po grafie stochastycznym czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ jest odmierzany liczbą wykonanych prób w tym doświadczeniu. Aby obliczyć wartość oczekiwaną zmiennej losowej $T^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ wystarczy zatem obliczyć średni czas błądzenia po grafie stochastycznym czekania $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ za pomocą wyżej wspomnianego algorytmu.

Przykład 8 Rozważmy czekanie $\delta^{\frac{1}{3}}_{11-101}$ i jego graf stochastyczny z rysunku 10.



Rys. 10 Graf stochastyczny doświadczenia $\delta^{\frac{1}{3}}_{11-101}$

Stosując algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym dostajemy układ równań

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$$\begin{cases} e_{w_0} &= 1 + \frac{2}{3}e_{w_0} + \frac{1}{3}e_1, \\ e_1 &= 1 + \frac{1}{3}e_{11} + \frac{2}{3}e_{10}, \\ e_{10} &= 1 + \frac{2}{3}e_{w_0} + \frac{1}{3}e_{101}, \\ e_{11} &= 0, \\ e_{101} &= 0, \end{cases}$$

po rozwiązaniu którego otrzymujemy, że $e_{w_0} = E(T^{\frac{1}{3}}_{11-101}) = 8,4$.

Przykład 9 Niech $\alpha_1 = 0101$, $\alpha_2 = 1010$ oraz $u = \frac{1}{2}$. Zauważmy, że

$$E(T^{\frac{1}{2}}_{0101}) = E(T^{\frac{1}{2}}_{1010}) = 20 \neq 15 = E(T^{\frac{1}{2}}_{0101-1010}).$$

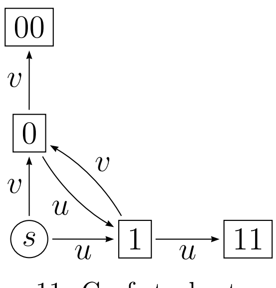
6 Własności serii orłów i reszek, serii sukcesów i porażek oraz serii kolorów. Osobliwe argumentacje.

6.1 Prawdopodobieństwo uzyskania danej serii sukcesów i porażek. Osobliwe argumentacje.

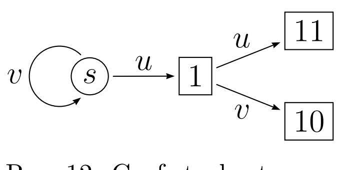
W tym paragrafie zostaną zaprezentowane specyficzne, mało znane a równocześnie elementarne środki argumentacji wykorzystywane do obliczania prawdopodobieństwa zdarzenia w przeliczalnych przestrzeniach probabilistycznych. Przestrzenie, o których mowa, są modelami czekań na serie sukcesów i porażek, czyli szczególnych par serii kolorów.

Wśród serii sukcesów i porażek można wyróżnić takie rodziny par serii, że dla każdej pary serii α_1 i α_2 z rodziny, prawdopodobieństwa zdarzeń $\{\ldots\alpha_j\}$ dla $j = 1,2$ można znajdować w analogiczny sposób, elementarnymi metodami, tj. za pomocą grafu stochastycznego i prostych argumentacji, bez odwoływania się do teorii szeregów. Poniżej podamy przykłady takich rodzin serii i metod znajdowania prawdopodobieństwa zdarzeń $\{\ldots\alpha_j\}$ dla $j = 1,2$.

Przykład 10 Niech $\alpha_1 = 00$ i $\alpha_2 = 11$. Rysunek 11 prezentuje graf stochastyczny doświadczenia losowego δ^u_{00-11}.



Rys. 11 Graf stochastyczny doświadczenia δ^u_{00-11}



Rys. 12 Graf stochastyczny doświadczenia δ^u_{11-10}

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Niech $P(\dots 11) = x$. W przestrzeni probabilistycznej indukowanej przez graf stochastyczny z rysunku 11 mamy

$$\begin{aligned} x = & u^2 + u^2 \cdot vu + u^2 \cdot (vu)^2 + u^2 \cdot (vu)^3 + \dots \\ & + vu^2 + vu^2 \cdot vu + vu^2 \cdot (vu)^2 + vu^2 \cdot (vu)^3 + \dots, \end{aligned}$$

a zatem

$$\begin{aligned} x &= u^2 + vu^2 + vu \cdot [u^2 + u^2 \cdot vu + u^2 \cdot (vu)^2 + u^2 \cdot (vu)^3 + \dots \\ &\quad + vu^2 + vu^2 \cdot vu + vu^2 \cdot (vu)^2 + vu^2 \cdot (vu)^3 + \dots] \\ &= u^2 + vu^2 + vu \cdot x. \end{aligned}$$

Ostatecznie otrzymujemy, że

$$x = \frac{u^2 + vu^2}{1 - vu} = \frac{2u^2 - u^3}{1 - u + u^2},$$

a więc

$$P(\dots 11) = \frac{2u^2 - u^3}{1 - u + u^2}.$$

Zdarzenia $\{\dots 00\}$ oraz $\{\dots 11\}$ są przeciwne, a więc

$$P(\dots 00) = 1 - P(\dots 11) = \frac{u^3 - u^2 - u + 1}{1 - u + u^2}.$$

Przykład 11 Niech $\alpha_1 = 11$ i $\alpha_2 = 10$. Graf doświadczenia δ^u_{11-10} przedstawia rysunek 12. Doświadczenie δ^u_{11-10} rozpoczyna się od czekania na pierwszy sukces (zob. [50], s. 246.). Suma wag wszystkich przejść z węzła w_0 do węzła 1 jest równa 1 (jako suma wszystkich wyrazów ciągu geometrycznego, w którym $a_1 = u$ oraz $q = v = 1 - u$). Po uzyskaniu sukcesu doświadczenie kończy się po kolejnej próbie, a więc

$$P(\dots 11) = u \qquad \text{oraz} \qquad P(\dots 10) = v = 1 - u.$$

Ta argumentacja daje się przenieść na przypadek serii 111 i 110, tj. powstałych z serii 11 i 10 przez dopisanie na początku 1.

Przykład 12 Weźmy pod uwagę serie $\alpha_1 = 111$ i $\alpha_2 = 110$ oraz doświadczenie $\delta^u_{111-110}$. O tym, którą serią zakończy się czekanie $\delta^u_{111-110}$ decyduje wynik próby przeprowadzonej bezpośrednio po uzyskaniu dwóch sukcesów pod rząd. Jeśli uzyskany zostanie sukces, to doświadczenie kończy się serią 111, jeśli porażka – doświadczenie kończy się serią 110. Wynika stąd, że

$$P(\dots 111) = u \qquad \text{oraz} \qquad P(\dots 110) = v = 1 - u.$$

Powyższą argumentację można uogólnić na serie o długości k ($k \in \mathbb{N}_4$), powstałe z serii 11 i 10 przez dopisanie na początku $(k-2)$ jedynek.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Przykład 13 Niech $\alpha_1 = 1_k$ oznacza serię, będącą ciągiem stałym o wyrazach równych 1, natomiast $\alpha_2 = 1_{k-1}0$ oznacza serię, której początek o długości $(k-1)$ jest ciągiem stałym o wyrazach równych 1, a ostatni wyraz jest równy 0. Rozważmy doświadczenie $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$. To, którą serią zakończy się czekanie, rozstrzyga wynik próby przeprowadzonej bezpośrednio po uzyskaniu $(k-1)$ sukcesów pod rząd. Jeśli próba ta zakończy się sukcesem, to zostanie uzyskana seria 1_k, jeśli porażką, to doświadczenie $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$ kończy się serią $1_{k-1}0$. Wynika stąd, że

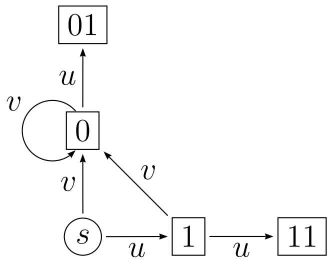
$$P(\ldots 1_k) = u \qquad \text{oraz} \qquad P(\ldots 1_{k-1}0) = v = 1 - u.$$

Ostatnią argumentację daje się przenieść na serie dualne.

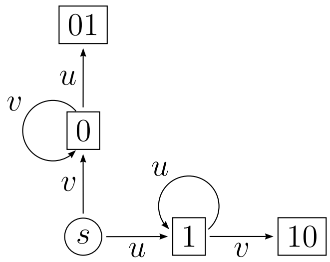
Przykład 14 Niech $\alpha_1 = 0_k$ i $\alpha_2 = 0_{k-1}1$. Serie 0_k i 1_k są dualne oraz serie $0_{k-1}1$ i $1_{k-1}0$ są dualne, a zatem z symetrii – analogicznie jak w przypadku doświadczenia $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, gdy $\alpha_1 = 1_k$ i $\alpha_2 = 1_{k-1}0$ – otrzymujemy, że

$$P(\ldots 0_k) = v = 1 - u \qquad \text{oraz} \qquad P(\ldots 0_{k-1}1) = u,$$

Przykład 15 Niech $\alpha_1 = 11$ i $\alpha_2 = 01$. Graf stochastyczny doświadczenia losowego δ^u_{11-01} prezentuje rysunek 13.



Rys. 13 Graf stochastyczny doświadczenia δ^u_{11-01}



Rys. 14 Graf stochastyczny doświadczenia δ^u_{10-01}

Jeśli czekanie znajdzie się w stanie 0, to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie δ^u_{11-01} zakończy się uzyskaniem serii 01, bo dalszy ciąg czekania jest czekaniem na sukces. Prawdopodobieństwo dotarcia do węzła 0 jest równe $v+uv = v(1+u) = 1-u^2$, a zatem

$$P(\ldots 01) = 1 - u^2 \qquad \text{oraz} \qquad P(\ldots 11) = 1 - P(\ldots 01) = u^2.$$

Argumentację powyższą można uogólnić na serie 111 i 011, które powstały z serii 11 i 01 przez dopisanie na końcu cyfry 1.

Przykład 16 Rozważmy serie: $\alpha_1 = 111$ i $\alpha_2 = 011$ oraz doświadczenie losowe $\delta^u_{111-011}$. Jeżeli porażka pojawi się nie później niż w trzeciej próbie po raz pierwszy, to uzyskanie serii 111 nie jest już możliwe. Doświadczenie $\delta^u_{111-011}$ zakończy się uzyskaniem serii 111 wtedy i tylko wtedy, gdy każda z trzech początkowych prób zakończy się sukcesem. Mamy więc

$$P(\ldots 111) = u^3,$$

a stąd wynika, że

$$P(\ldots 011) = 1 - u^3.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Ostatnią argumentację można uogólnić na serie o długości k ($k \in \mathbb{N}_4$), powstałe z serii 11 i 01 przez dopisanie na końcu $(k-2)$ jedynek.

Przykład 17 Rozważmy doświadczenie $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, gdzie $\alpha_1 = 1_k$ i $\alpha_2 = 01_{k-1}$. Jeżeli porażka po raz pierwszy pojawi się nie później niż w $(k-1)$-szej próbie, to uzyskanie serii α_1 nie jest już możliwe, bowiem po uzyskaniu $(k-1)$ sukcesów doświadczenie kończy się uzyskaniem serii 01_{k-1}. Seria 1_k zostanie uzyskana wtedy i tylko wtedy, gdy k początkowych prób zakończy się sukcesem. Z powyższych faktów wynika, że

$$P(\ldots 1_k) = u^k \qquad \text{i} \qquad P(\ldots 01_{k-1}) = 1 - u^k.$$

Tę argumentację można łatwo przenieść na serie dualne.

Przykład 18 Niech $\alpha_1 = 0_k$ i $\alpha_2 = 10_{k-1}$. Serie 0_k i 1_k są dualne oraz serie 10_{k-1} i 01_{k-1} są dualne, a zatem z symetrii wynika, że

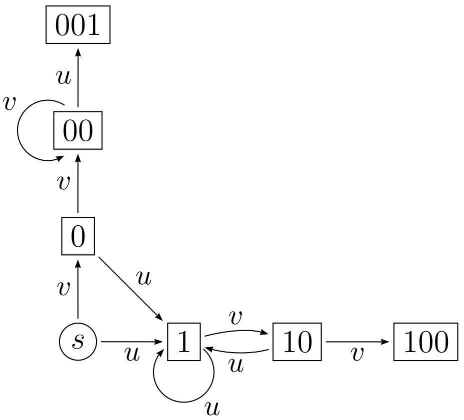
$$P(\ldots 0_k) = v^k = (1-u)^k \qquad \text{oraz} \qquad P(\ldots 10_{k-1}) = 1 - (1-u)^k.$$

Przykład 19 Niech $\alpha_1 = 10$ i $\alpha_2 = 01$. Graf doświadczenia losowego δ^u_{10-01} prezentuje rysunek 14. O tym, która z serii zostanie uzyskana w doświadczeniu δ^u_{10-01}, decyduje wynik pierwszej próby. Jeśli pierwsza próba zakończy się porażką, to dalszy przebieg doświadczenia jest czekaniem na pierwszy sukces, a więc z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się – wcześniej czy później – uzyskaniem serii 01. Analogicznie, jeśli pierwsza próba zakończy się sukcesem, to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się uzyskaniem serii 10. Jest więc

$$P(\ldots 10) = u \qquad \text{i} \qquad P(\ldots 01) = v = 1 - u.$$

Powyższe rozumowanie można przenieść na serie 100 i 001, które powstały przez dopisanie 0 na końcu serii 10 i na początku serii 01.

Przykład 20 Rozważmy dwie serie: $\alpha_1 = 100$ i $\alpha_2 = 001$ oraz doświadczenie losowe $\delta^u_{100-001}$. Rysunek 15 przedstawia graf stochastyczny doświadczenia $\delta_{100-001}$.



Rys. 15 Graf stochastyczny doświadczenia $\delta_{100-001}$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Jeżeli czekanie znajdzie się w stanie 1, to zajście zdarzenia $\{\ldots 001\}$ nie jest już możliwe. Natomiast jeśli czekanie znajdzie się w stanie 00, to w tej sytuacji zajście zdarzenia $\{\ldots 001\}$ jest pewne. Aby czekanie zakończyło się serią 100, sukces musi pojawić się po raz pierwszy nie później niż w drugiej próbie. Wynika stąd, że doświadczenie $\delta^u_{100-001}$ zakończy się serią 001 wtedy i tylko wtedy, gdy dwie pierwsze próby zakończą się porażką. Mamy więc

$$P(\ldots 100) = u + vu = 2u - u^2 \qquad \text{oraz} \qquad P(\ldots 001) = v^2 = (1-u)^2.$$

Tę argumentację można uogólnić na serie, powstałe przez dopisanie $(k-2)$ zer na końcu serii 10 i na początku serii 01 ($k \in \mathbb{N}_4$).

Przykład 21 Rozważmy serie $\alpha_1 = 10_{k-1}$ i $\alpha_2 = 0_{k-1}1$ oraz doświadczenie $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$. Jeżeli sukces pojawi się w którejkolwiek z $(k-1)$ początkowych prób, to uzyskanie serii α_2 nie jest już możliwe, bowiem po $(k-1)$ porażkach doświadczenie zakończy się uzyskaniem serii α_1. Aby doświadczenie $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$ zakończyło się serią α_2, każda z $(k-1)$ pierwszych, kolejnych prób musi zakończyć się porażką. W takiej sytuacji (z prawdopodobieństwem równym 1) doświadczenie zakończy się serią α_2. Z powyższych rozważań wynika, że

$$\begin{aligned} P(\ldots 10_{k-1}) &= u + vu + v^2u + \ldots + v^{k-2} \cdot u = u \cdot \frac{1-v^{k-1}}{1-v} \\ &= 1 - v^{k-1} = 1 - (1-u)^{k-1}, \\ P(\ldots 0_{k-1}1) &= v^{k-1} = (1-u)^{k-1}. \end{aligned}$$

6.2 Prawdopodobieństwo uzyskania danej serii sukcesów i porażek jako funkcja prawdopodobieństwa sukcesu

Dla każdego doświadczenia $\delta^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ i ustalonego $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ jest $P(\ldots \omega_j)$ funkcją parametru u. Niech

$$P(\ldots \omega_j) = f_{\ldots \omega_j}(u) \text{ dla } u \in (0,1).$$

Analogicznie, w przypadku $n = 2$, niech

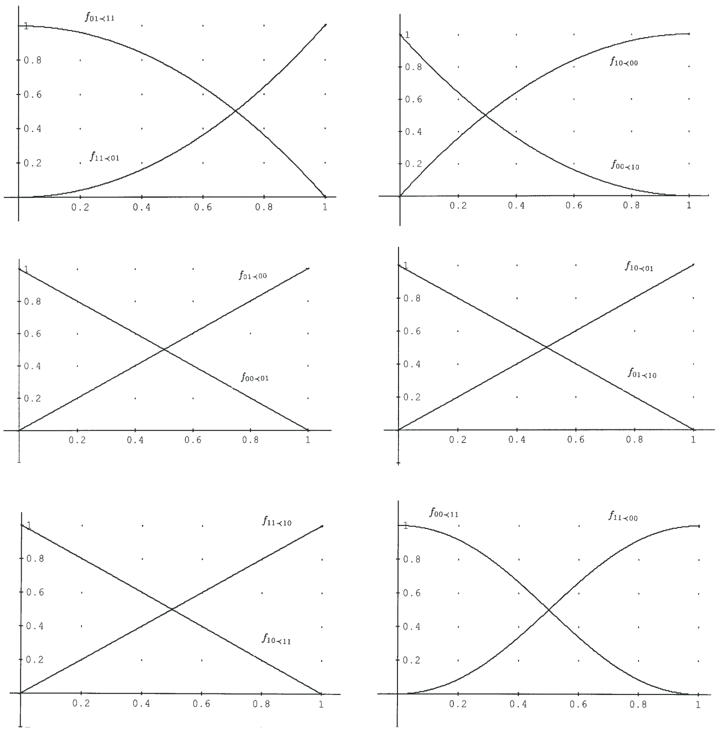
$$P(\ldots \omega_1) = f_{\omega_1 \prec \omega_2}(u) \text{ dla } u \in (0,1).$$

6.2.1 Czekanie na jedną z dwóch serii sukcesów i porażek o długości 2

Nietrudno zauważyć, że

$$P(\ldots \omega_2) = 1 - f_{\omega_1 \prec \omega_2}(u).$$

Na rysunku ?? przedstawiono wykresy funkcji $f_{\omega_1 \prec \omega_2}$ dla serii $\omega_1, \omega_2 \in \{11, 10, 01, 00\}$, gdzie $\omega_1 \neq \omega_2$ (na wspólnym układzie współrzędnych znajdują się wykresy funkcji $f_{\omega_1 \prec \omega_2}$ i $f_{\omega_2 \prec \omega_1}$).



Z wykresów odczytujemy, że:
$(10 \gg 11)_u$ dla $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(11 \gg 10)_u$ dla $u \in (\frac{1}{2}, 1)$ oraz $(10 \approx 11)_u$ dla $u = \frac{1}{2}$,
$(01 \gg 10)_u$ dla $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(10 \gg 01)_u$ dla $u \in (\frac{1}{2}, 1)$ oraz $(01 \approx 10)_u$ dla $u = \frac{1}{2}$,
$(00 \gg 10)_u$ dla $u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$, $(10 \gg 00)_u$ dla $u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1)$ oraz $(00 \approx 10)_u$ dla $u = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$,
$(01 \gg 11)_u$ dla $u \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(11 \gg 01)_u$ dla $u \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ oraz $(01 \approx 11)_u$ dla $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$,
$(00 \gg 11)_u$ dla $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(11 \gg 00)_u$ dla $u \in (\frac{1}{2}, 1)$ oraz $(11 \approx 00)_u$ dla $u = \frac{1}{2}$,
$(00 \gg 01)_u$ dla $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(01 \gg 00)_u$ dla $u \in (\frac{1}{2}, 1)$ oraz $(00 \approx 01)_u$ dla $u = \frac{1}{2}$.

Uzyskane w ten sposób informacje o seriach zebrano w tabeli:

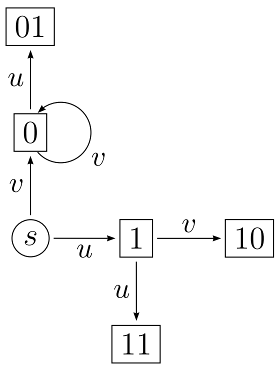
Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

<table>
<tr><td>$u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$</td><td>$u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$</td><td>$u \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$</td><td>$u \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$10 \prec 11$</td><td colspan="2">$11 \prec 10$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$01 \prec 10$</td><td colspan="2">$10 \prec 01$</td></tr>
<tr><td>$00 \prec 10$</td><td colspan="3">$10 \prec 00$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$01 \prec 11$</td><td>$11 \prec 01$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$00 \prec 11$</td><td colspan="2">$11 \prec 00$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$00 \prec 01$</td><td colspan="2">$01 \prec 00$</td></tr>
</table>

Z danych zebranych w tabeli wynika, że relacja $\gg$ dla $u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ jest relacją przechodnią, natomiast dla $u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ nie jest relacją przechodnią.

6.2.2 Czekanie na jedną z trzech serii sukcesów i porażek o długości 2

Niech $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{0,1\}^2$. Są cztery doświadczenia losowe typu $\delta^u_{\omega_1-\omega_2-\omega_3}$.
4.1. Rysunek 16 przedstawia graf stochastyczny doświadczenia losowego $\delta^u_{10-11-01}$.

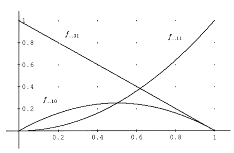


Rys. 16

Z grafu odczytujemy, że:
– jeśli pierwsza próba zakończy się porażką, to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się serią 01;
– jeśli pierwsza próba zakończy się sukcesem a druga porażką, to doświadczenie kończy się serią 10;
– jeśli dwie pierwsze próby zakończą się sukcesem, to doświadczenie kończy sie serią 11.
Wynika stąd, że

$$P(\ldots 01) = v = 1 - u,\ P(\ldots 10) = uv = u(1-u) \text{ i } P(\ldots 11) = u^2.$$

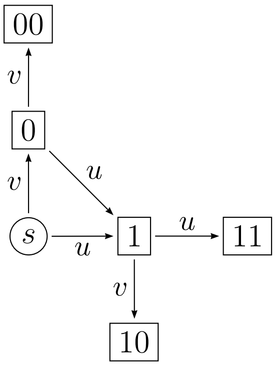
Wykresy funkcji $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 11}$ przedstawia rysunek 17.



Rys. 17

Mamy tu:
$(01 \gg 10)_{(0,1)}$,
$(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},1)}$,
$(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$.

4.2. Graf stochastyczny doświadczenia $\delta^u_{10-11-00}$ przedstawia rys. 18.

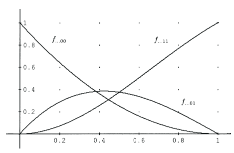


Rys. 18

Przestrzeń probabilistyczna tego doświadczenia jest skończona. Mamy bowiem $\Omega_{10-11-00} = \{00, 10, 11, 010, 011\}$ i
$p^u_{10-11-00}(00) = v^2 = (1-u)^2$,
$p^u_{10-11-00}(10) = uv = u(1-u)$,
$p^u_{10-11-00}(11) = u^2$,
$p^u_{10-11-00}(010) = uv^2 = u(1-u)^2$ oraz
$p^u_{10-11-00}(011) = u^2v = u^2(1-u)$.

Ponieważ $\{\ldots 00\} = \{00\}$, $\{\ldots 11\} = \{11, 011\}$ i $\{\ldots 10\} = \{10, 010\}$, to $P(\ldots 00) = (1-u)^2$,
$P(\ldots 10) = u(1-u) + u(1-u)^2 = u(1-u)(2-u)$ oraz
$P(\ldots 11) = u^2 + u^2(1-u) = u^2(2-u)$.

Wykresy funkcji $f_{\ldots 00}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 11}$ przedstawiono na rysunku 19.



Rys. 19

Otrzymujemy stąd, że:

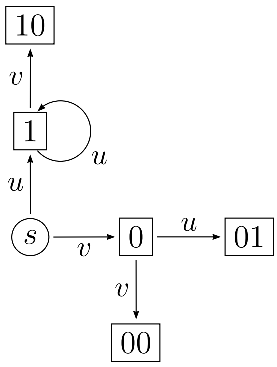
Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$(01 \gg 00)_{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},1)}$, $(00 \gg 01)_{(0,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$,

$(00 \gg 11)_{(0,u_0)}$, $(11 \gg 00)_{(u_0,1)}$, gdzie $u_0 = \dfrac{2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \approx 0,445$,

$(11 \gg 01)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(01 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$.

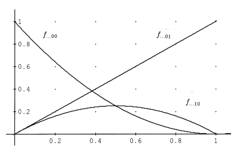
4.3. Graf stochastyczny doświadczenia losowego $\delta^u_{10-00-01}$ przedstawia rys. 20.



Rys. 20

Z izomorfizmu grafów stochastycznych doświadczeń losowych $d^u_{10-11-01}$ i $d^u_{10-00-01}$ wynika, że
$P(\ldots 01) = u$, $P(\ldots 10) = uv = u(1-u)$ i $P(\ldots 00) = v^2 = (1-u)^2$.

Wykresy funkcji $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 00}$ prezentuje rysunek 21.

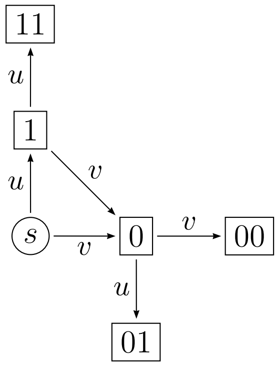


Rys. 21

Otrzymujemy zatem, że:
$(01 \gg 10)_{(0,1)}$,
$(00 \gg 01)_{(0,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$,
$(00 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$.

4.4. Weźmy pod uwagę doświadczenie losowe $\delta^u_{01-11-00}$. Graf tego doświadczenia losowego przedstawia rys. 22.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

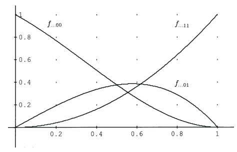


Rys. 22

Rozumując analogicznie jak powyżej i wykorzystując wcześniej uzyskane wyniki otrzymujemy, że

$P(\ldots 01) = u(1-u)(1+u)$, $P(\ldots 11) = u^2$ i $P(\ldots 00) = (1+u)(1-u)^2$.

Wykresy funkcji $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 11}$ i $f_{\ldots 00}$ przedstawia rysunek 23.



Rys. 23

Mamy tu:

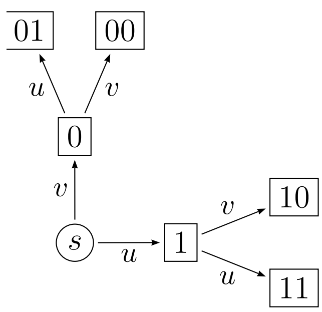
$(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,

$(00 \gg 11)_{(0,u_0)}$, $(11 \gg 00)_{(u_0,1)}$, gdzie $u_0 = \frac{2}{3} - \dfrac{2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \approx 0{,}555$,

$(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},1)}$.

6.2.3 Czekanie na jedną z czterech serii sukcesów i porażek o długości 2

Graf doświadczenia $\delta^u_{11-10-01-00}$ przedstawia rys.24.

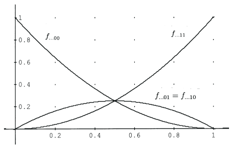


Rys. 24

Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega_{11-10-01-00}, p^u_{11-10-01-00})$ jest skończona. Mamy $\Omega_{11-10-01-00} = \{11, 10, 01, 00\}$ i
$p^u_{11-10-01-00}(11) = u^2$,
$p^u_{11-10-01-00}(10) = u(1-u)$,
$p^u_{11-10-01-00}(01) = u(1-u)$ oraz
$p^u_{11-10-01-00}(00) = (1-u)^2$.

W tej skończonej przestrzeni probabilistycznej jest:
$P(\ldots 11) = u^2$,
$P(\ldots 10) = u(1-u)$,
$P(\ldots 01) = u(1-u)$ oraz
$P(\ldots 00) = (1-u)^2$.

Wykresy funkcji $f_{\ldots 00}$, $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ i $f_{\ldots 11}$ przedstawia rysunek 25.



Rys. 25

Mamy zatem:
$(01 \approx 10)_{(0,1)}$,
$(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,
$(00 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,
$(00 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,
$(11 \gg 01)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(01 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$,
$(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$.

6.3 Paradoksalne własności serii orłów i reszek, serii sukcesów i porażek oraz serii kolorów

Poniżej przedstawiono przykłady paradoksalnych własności serii kolorów, w tym serii orłów i reszek oraz serii sukcesów i porażek.

Przykład 22 Weźmy pod uwagę serie sukcesów i porażek: 10, 01 i 00. Jest tutaj

$$(10 \approx 01)_{\frac{1}{2}} \wedge (01 \approx 00)_{\frac{1}{2}} \wedge (10 \gg 00)_{\frac{1}{2}}.$$

Przykład 23 Rozważmy serie sukcesów i porażek: 1101, 1011 i 0111. Mamy tu

$$(1101 \gg 1011)_{\frac{1}{2}} \wedge (1011 \gg 0111)_{\frac{1}{2}} \wedge (0111 \gg 1101)_{\frac{1}{2}},$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

zatem wśród tych trzech serii nie ma najlepszej (tj. lepszej od każdej z dwóch pozostałych). Z kolei w czekaniu $\delta^2_{1101-1011-0111}$ jest

$$0111 \gg 1011 \wedge 1011 \gg 1101 \wedge 0111 \gg 1101,$$

a to oznacza, że w kontekście czekania $\delta^2_{1101-1011-0111}$ seria 0111 jest najlepsza (bo jest lepsza od każdej z dwóch pozostałych).

Przykład 24 Rozpatrzmy jednoparametrową rodzinę doświadczeń δ^u_{10-01}, gdzie $u \in (0,1)$. W modelu czekania δ^u_{10-01} np.: dla $u = \frac{2}{3}$ i $u = \frac{3}{4}$ jest $(10 \gg 01)_u$, a np.: dla $u = \frac{1}{3}$ i $u = \frac{1}{4}$ jest $(01 \gg 10)_u$. Wydaje się, że dla każdych dwóch serii sukcesów i porażek α_1, α_2 oraz jednoparametrowej rodziny doświadczeń $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n}$, gdzie $n \geqslant 2$, zawsze istnieje parametr (parametry), aby jedna seria była lepsza od drugiej. Rozważmy jednoparametrową rodzinę doświadczeń $\delta^u_{00-01-10}$, gdzie $u \in (0,1)$. Mamy tutaj

$$\forall\ u \in (0,1) \quad \left[(01 \gg 10)^{00-01-10}_u\right].$$

W kontekście dowolnego czekania z powyższej rodziny seria 01 jest zawsze lepsza od serii 10.

Przykład 25 Niech $\alpha_1 = 2221$, $\alpha_2 = 2112$, $\alpha_3 = 1122$ oraz $u_1 = 0,3255$, $u_2 = 0,335$, $u_3 = 0,3395$. Wówczas w modelu czekania $\delta^{u_1-u_2-u_3}_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ mamy

$$2221 \gg 2112 \wedge 2112 \gg 1122 \wedge 2221 \gg 1122.$$

Natomiast w modelu czekania $\delta^{u_1-u_2-u_3}_{\alpha_1-\alpha_3}$ jest

$$1122 \gg 2221.$$

Przykład 26 Niech $\alpha_1 = 1221$, $\alpha_2 = 2212$, $\alpha_3 = 1311$ oraz $u_1 = 0,3255$, $u_2 = 0,335$, $u_3 = 0,3395$. Jest tu

$$(1221 \gg 2212)_{(u_1,u_2,u_3)} \wedge (2212 \gg 1311)_{(u_1,u_2,u_3)} \wedge (1221 \gg 1311)_{(u_1,u_2,u_3)},$$

natomiast w modelu czekania $\delta^{u_1-u_2-u_3}_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ mamy

$$1311 \gg 1221 \wedge 1221 \gg 2212 \wedge 1311 \gg 2212.$$

Przykład 27 Niech $\alpha_1 = 2312$, $\alpha_2 = 3122$, $\alpha_3 = 2232$ oraz $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{3}$. Otrzymujemy tutaj

$$(2312 \gg 3122)_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})} \wedge (3122 \gg 2232)_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})} \wedge (2312 \approx 2232)_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})},$$

natomiast w modelu czekania $\delta^3_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ mamy

$$2312 \gg 2232 \wedge 2232 \gg 3122 \wedge 2312 \gg 3122.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Przykład 28 Niech $\alpha_1 = 123$, $\alpha_2 = 231$, $\alpha_3 = 312$ oraz $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{4}$. Jest tu

$$(123 \gg 231)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})} \wedge (231 \gg 312)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})} \wedge (312 \gg 123)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})},$$

natomiast w modelu czekania $\delta^4_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ mamy

$$123 \approx 231 \wedge 231 \approx 312 \wedge 123 \approx 312.$$

Przykład 29 Niech $\alpha_1 = 0111$, $\alpha_2 = 1110$. Mamy tu

$$(0111 \Diamond 1110)_{\frac{1}{2}},$$

ale w czekaniu $\delta^2_{0111-1110}$ jest

$$0111 \gg 1110.$$

Przykład 30 Niech $\alpha_1 = 1111$, $\alpha_2 = 1110$. Jest tu

$$(1110 \lhd 1111)_{\frac{1}{2}},$$

natomiast w czekaniu $\delta^2_{1111-1110}$ mamy

$$1110 \approx 1111.$$

Przykład 31 Niech $\alpha_1 = 3421$, $\alpha_2 = 2342$ oraz $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{4}$. Jest tutaj

$$(3421 \lhd 2342)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})},$$

ale w czekaniu $\delta^4_{3421-2342}$ mamy

$$2342 \gg 3421.$$

7 Gry losowe i strategiczno-losowe

7.1 Gry losowe

□ [gra losowa z udziałem m graczy] Niech para $(\Omega_\delta, p_\delta)$ będzie modelem probabilistycznym doświadczenia losowego δ. Załóżmy, że zdarzenia $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ są związane z doświadczeniem δ i tworzą układ zupełny zdarzeń w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_\delta, p_\delta)$ (każde jest podzbiorem zbioru Ω_δ). W grze, w której uczestniczą gracze $G_1, G_2, G_3, \ldots, G_m$, przeprowadza się doświadczenie losowe δ i jeśli zajdzie zdarzenie A_j, to zwycięża gracz G_j ($j = 1, 2, 3 \ldots, m$). Opisaną grę nazywamy grą losową z udziałem m graczy. Taką grę nazywamy sprawiedliwą, jeśli

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \cdots = P(A_m) = \frac{1}{m}.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

7.1.1 Gra Penney'a

W 1974 roku w Journal of Recreational Mathematics (vol. 7, No. 4, Fall, 1974) Walter Penney zaproponował następującą grę (poniżej tłumaczenie z oryginału):

"Jeżeli rzucamy trzy razy pod rząd monetą to otrzymujemy jeden z ośmiu jednakowo prawdopodobnych wyników, są to: HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT. To jest raczej dziwne, że wybrana seria niekoniecznie musi mieć taką samą szansę pojawienia się jak dowolna inna seria. Ten fakt może być zilustrowany na przyk-adzie następującej gry: ty i twój przeciwnik wybieracie sobie serie, rzucanie monetą powtarzacie tak długo aż ukaże się jedna z dwu serii. Zwycięża ten gracz, którego seria się ukazała. Twój przeciwnik wybiera HHH, ty wybierasz HTH. Przekonasz się, że masz większe szanse. Jak duże są te twoje szanse?

Rozwiązanie autora: Odpowiedź brzmi: twoje szanse są jak 3 do 2. Oznaczmy twoje szanse przez P. Jeśli w pierwszym rzucie wypadnie H, to mamy cztery jednakowo prawdopodobne przypadki (jako wyniki kolejnych dwu rzutów monetą):
-HH (i wtedy przegrywasz)
-TH (i wtedy wygrywasz)
-TT (i wtedy musicie obaj czekać aż ponownie ukaże się H; stąd twoje szanse wygrania wynoszą znowu P) i
-HT. W tym ostatnim przypadku w zależności od tego czy jako następny wypadnie H czy T (oba tak samo możliwe) ty wygrywasz albo wracasz do szansy P.
Podsumujmy twoje szanse:

$$P = 0_{HH} + \frac{1}{4}_{TH} + \frac{exa}{4}_{TT} + \frac{1}{8}_{HTH} + \frac{exa}{8}_{HTT},$$

czyli $P = \frac{3}{5}$."

7.2 Gry strategiczno-losowe

Rozważmy następującą modyfikację gry Penney'a: na początku gry gracze mogą wybierać sobie serie. Gracz G_A wybiera swoją serię α jako pierwszy. Następnie gracz G_B, znając serię wybraną przez gracza G_A, wybiera serię $\beta \in \{0,1\}^k \setminus \alpha$. Dla każdego z graczy pojawia się więc problem wyboru serii dającej największe szanse na zwycięstwo. W tym paragrafie rozważymy optymalne strategie wyboru dla każdego z graczy. Będziemy rozważać grę, w której gracze będą wybierać serie o długości k, gdzie $k \geqslant 3$.

Definicja 52 (seria lepsza) Jeżeli w przestrzeni probabilistycznej $(\Omega_{\alpha-\beta}, p_{\alpha-\beta})$ jest

$$P(\alpha \prec \beta) > P(\beta \prec \alpha),$$

to serię α nazywamy lepszą od serii β i oznaczamy $\alpha \gg \beta$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja 53 (seria kontr-optymalna) Niech α będzie ustaloną serią orłów i reszek i niech $|\alpha| = k$, $k \geqslant 3$. Rozważmy zbiór $\mathcal{A}_\alpha = \{\beta : |\beta| = k \wedge \alpha \neq \beta\}$. Serię $\hat{\alpha}$, dla której zachodzi warunek

$$\forall_{\beta \in \mathcal{A}_\alpha} P(\hat{\alpha} \prec \alpha) \geqslant P(\beta \prec \alpha),$$

nazywamy serią kontr-optymalną do serii α.

Załóżmy, że $\alpha = a_1 a_2 ... a_k \in \{H, T\}^k$, $k \geqslant 3$. Przyjmijmy oznaczenia

$$\alpha_H = H a_1 a_2 ... a_{k-1} \quad \text{oraz} \quad \alpha_T = T a_1 a_2 ... a_{k-1}.$$

Twierdzenie 2 Jeżeli α jest serią orłów i reszek, to

$$\hat{\alpha} = \alpha_H \quad \text{lub} \quad \hat{\alpha} = \alpha_T. \quad \blacksquare$$

Dowód tego twierdzenia podali L. Guibas i A. M. Odlyzko (por. [17], s. 183-208).

Twierdzenie 3 Dla każdej serii orłów i reszek α jest

$$P(\alpha_H \prec \alpha) \neq P(\alpha_T \prec \alpha). \quad \blacksquare$$

Z powyższych twierdzeń wynika, że do każdej serii α istnieje dokładnie jedna seria kontr-optymalna. Jest nią jedna z serii α_H albo α_T. Ostatecznie (por. [17], s. 183-208) otrzymujemy

Twierdzenie 4 Dla każdej serii orłów i reszek α jest

$$P(\alpha \prec \hat{\alpha}) < P(\hat{\alpha} \prec \alpha),$$

czyli seria kontr-optymalna do serii α jest serią lepszą od serii α $\blacksquare$.

Bezpośrednim wnioskiem z twierdzenia 4 jest

Twierdzenie 5 Nie istnieje $k \geqslant 3$, aby relacja $\gg$ była w zbiorze $\{H, T\}^k$ relacją przechodnią $\blacksquare$.

Dowód. Niech $\alpha \in \{H, T\}^k$, gdzie $k \geqslant 3$, będzie dowolną, ustaloną serią orłów i reszek. Przyjmijmy umowę, że $\hat{\alpha} = \alpha_1$, $\hat{\alpha_1} = \alpha_2$, $\hat{\alpha_2} = \alpha_3$, itd. Jest oczywiście

$$\alpha_2 \gg \alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \alpha_1 \gg \alpha.$$

Jeśli $\sim (\alpha_2 \gg \alpha)$, to relacja $\gg$ nie jest przechodnia. Jeśli jednak $\alpha_2 \gg \alpha$, to rozważamy serię α_3 i wówczas mamy

$$\alpha_3 \gg \alpha_2, \qquad \alpha_2 \gg \alpha_1 \quad \text{oraz} \quad \alpha_1 \gg \alpha.$$

Jeśli $\sim (\alpha_3 \gg \alpha \vee \alpha_3 \gg \alpha_1)$, to relacja $\gg$ nie jest przechodnia.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Jeśli $\alpha_3 \gg \alpha$ i $\alpha_3 \gg \alpha_1$, to rozważamy serię α_4 itd. Zbiór $\{H, T\}^k$ jest skończony, a zatem powyższa procedura doprowadzi nas ostatecznie do wniosku, że relacja $\gg$ nie jest przechodnia. ■

Relacja $\gg$ pojawia się w kontekście doświadczenia losowego przeprowadzanego w grze zaproponowanej w 1974 roku przez Waltera Penney'a (zob. [?]). W grze uczestniczą dwaj gracze: G_A i G_B. Na początku gry gracze wybierają sobie serie ze zbioru $\{H, T\}^k$, gdzie $k \geqslant 3$ jest ustaloną wcześniej długością serii. Gracz G_A wybiera swoją serię α jako pierwszy. Następnie gracz G_B, znając serię wybraną przez gracza G_A, wybiera swoją serię $\beta \in \{H, T\}^k \setminus \alpha$. Następnie przeprowadza się doświadczenie $\delta_{\alpha-\beta}$ i jeśli zajdzie zdarzenie $\{\alpha \prec \beta\}$, to zwycięża gracz G_A, jeśli natomiast zajdzie zdarzenie $\{\beta \prec \alpha\}$, to zwycięża gracz G_B. Jest oczywiste, że większe szanse na zwycięstwo ma ten z graczy, którego seria jest lepsza. Paradoksem jest, że gracz wybierający swoją serię jako drugi ma - po odpowiednim wyborze serii - większe szanse na zwycięstwo w grze. Prawo pierwszeństwa w wyborze serii nie jest więc przywilejem.

Ponieważ relacja $\gg$ nie jest przechodnia, to - paradoksalnie - z faktu, że gracz G_A ma większe szanse na zwycięstwo niż gracz G_B oraz gracz G_B ma większe szanse na zwycięstwo niż gracz G_C nie wynika, że w grze z udziałem graczy G_A i G_C większe szanse na zwycięstwo ma gracz G_A (bez względu na to, jakiej długości serie gracze wybierają).

Literatura

[1] ANTOCH J., HLUBINKA D., SAXL I., Pravděpodobnost a statistika na středni škole, matfyzpress, Praha 2005.

[2] BATANERO C., HENRY M., PARZYSZ, The nature of chance and probability, In G. Jones (Ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning (pp. 15-37), Springer, New York 2004.

[3] BATANERO C., GODINO J. D., Roa R., Training teachers to teach probability, Journal of Statistics Education Volume 12, on line: www.amstat.org/publications/ise/.

[4] BOBROWSKI D., Probabilistyka w zastosowaniach technicznych, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1986.

[5] BRÉMAUD P., Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues, Springer – Verlag, New York 1999.

[6] CSIRIK J. A., Optimal strategy for the first player in the Penney ante game, Combinatorics, Probability and Computing 1 (1992), 311–321.

[7] DEO N., Teoria grafów i jej zastosowania w technice i informatyce, PWN, Warszawa 1980.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[8] ENGEL A., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band I, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1980.

[9] ENGEL A., Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik, Band 2, Ernst Klett Verlag, Stuttgart 1978.

[10] ENGEL A., Stochastik, Ernst Klett Verlag. Stuttgart 1990.

[11] FELLER W., Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1977.

[12] FISCHBEIN E., The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Childem, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht 1975.

[13] FREUDENTHAL H., Rola intuicji geometrycznych we współczesnej matematyce, Wiadomości Matematyczne DC (1966).

[14] GARDNER M., Time Travel and Other Mathematical Bewilderments, W. H. Freeman and Company, New York 1988.

[15] GRAHAM R., GRÖTSCHEL M., LOVÁSZ L., Handbook of combinatorics, Volume I, The Mit Press, Cambridge, Massachusetts 1995.

[16] GRAHAM R., KNUTH D., PATASHNIK O., Matematyka konkretna, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 1996.

[17] GUIBAS L. J., ODLYZKO A. M., String overlaps, pattern matching, and non-transitive games, Journal of Combinatorial Theory, 30 (1981), seria A, 183–208.

[18] HUMENBERGER H., Ein Paradoxon bei Münzwurfserien und bedingte Erwartungswerte, w: Beiträge der 32.Tagung für Didaktik der Mathematik, München 1998.

[19] HUMENBERGER H., Kopf–Adler–Muster in Münzwurfserien, unendliche Reihen und Fibonacci–Zahlen, w: Beiträge zum Mathematikunterricht, Verlag Franzbecker, Hildeshein, Berlin 1999, 245–248.

[20] IOSIFESCU M., Skończone procesy Markowa i ich zastosowania, PWN, Warszawa 1988.

[21] JAKUBOWSKI J., SZTENCEL R., Wstęp do teorii prawdopodobieństwa, SCRIPT, Warszawa 2001.

[22] KAPADIA R. BOROVCNIK M., Chance Encounters: Probability in Education, Kluwer Academic Publishers, Dortrecht – Boston – London 1991.

[23] KIM W. H., CHIEN R. T., Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks, Columbia University Press, New York 1962.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[24] KRECH I., TLUSTY P., Stochasticke grafy a jejich aplikace, Jihoceska univerzita v Ceskych Budejovic?ch, Ceske Budejovice 2012.

[25] KRECH I., Probability in probability spaces connected with generalised Penney's games, Acta Univ. Purkynianae 42(1999), 71-77.

[26] KRECH I., Serie uspechu a neuspechu s racionaln?? pravdepodobnost? uspechu, Department of Mathematics Report Series 8(2000), 17-24.

[27] KRECH I., Prawdopodobieństwo w pewnych argumentacjach na lekcji matematyki, Autenticke vyucovanie a vyuzitie medzipredmetovych vztahov vo vyucoban? matematiky. Zborn?k pr?spevkov, Pedagogicka fakulta UMB, Banska Bystrica, 2. konferencie ucitelov matematiky 2000, 57-61.

[28] KRECH I., Waiting for series of colours and properties of some relations in a set of these series, Acta Univ. Purkynianae 72 Studia Mathematica (2001), 124-128.

[29] KRECH I., Łańcuchy Markowa w szkolnej matematyce, Matematika v skole dnes a zajtra. Zborn?k pr?spevkov, Katol?cka Univerzita v Ruzomberku, Matematika v skole dnes a zajtra 2001, 112-124.

[30] KRECH I., Osobliwe własności modeli probabilistycznych czekania na serie sukcesow i porażek, Ann. Acad. Paed. Cracov. 5 Studia Ad Calculum Probabilistis Eiusque Didacticam Pertinentia 1(2002), 39-55.

[31] KRECH I., Awaiting the series of colours - stochastic graph as the means of mathematical treatment and argumentation, Ann. Acad. Paed. Cracov. 16 Studia Mathematica III (2003), 119-124.

[32] KRECH I., Engel's reductions of stochastic graph, Proc. of the XIIth Czech-Polish-Slovak Mathematical School, Hlubo˘s June 2th - 4th 2005, 146-151.

[33] KRECH I., Penneyove hry a ich zovseobecnenie, Horizons of mathematics, physics and computer sciences 2/2007 Volume 36, Nitra 2007, 1-7.

[34] KRECH I., Rachunek prawdopodobieństwa i sumowanie szeregów, Matematyka 1 (2000), 19–24.

[35] KRECH I., TLUSTY P.,Waiting Time for Series of Successes and Failures and Fairness of Random Games, Teaching Mathematics: innovation, new trends, research, Ružomberok 2009.

[36] KRECH I., Stochasticky graf jako hrac? platno k nahodne hre a jako prostredek matematicke argumentace, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Matematika 3, Olomouc 2008, 155-159.

[37] KRECH I., Tlusty P., Stochasticke grafy jako nastroj reseni matematickych uloh, Matematika-fyzika-informatika 5 (Rocnik 19, Leden 2010), Olomouc 2010.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[38] KRYGOWSKA Z., Zarys dydaktyki matematyki, t.I., WSiP, Warszawa 1979.

[39] KUBIK L. T., Rachunek prawdopodobieństwa. Podręcznik dla kierunków nauczycielskich studiów matematycznych, PWN, Warszawa 1986.

[40] KULIKOWSKI J. L., Zarys teorii grafów, PWN, Warszawa 1986.

[41] MA, L. P., Knowing and teaching elementary mathematics, Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum 1999.

[42] MASON S. J., Feedback Theory: Some properties of signal flow graphs, Proc. I. R. E., 41 (1953), Sept. Nr 9, 1144–1156.

[43] MASON S. J., Feedback Theory: Further properties of signal flow graphs, Proc. I. R. E., 44 (1956), July Nr 7, 920–926.

[44] MEDVEDEV G. A., Analiz stohastičeskih grafov, opisyvajuščih povedenie šagovyh sistem avtomatičeskogo poiska, Avtomatika i Vyčislitelnaja Tehnika, 4 (1968), 27–30.

[45] ODYNIEC W., SZKUDLARSKI D., Matematyka dyskretna, Wydawnictwo WSP TK, Zielona Góra 1999.

[46] PENNEY W., Problem 95: Penney-Ante, Jurnal of Recreational Mathematics, 7 (1974), 321.

[47] PŁOCKI A., Stochastyka dla nauczyciela, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2010.

[48] PŁOCKI A., Prawdopodobieństwo wokół nas. Rachunek prawdopodobieństwa w zadaniach i problemach, Wydawnictwo Dla szkoły, Wilkowice 2004.

[49] PŁOCKI A., Propedeutyka rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej dla nauczycieli, PWN, Warszawa 1992.

[50] PŁOCKI A., Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

[51] PŁOCKI A., Stochastyka 2. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. Zarys dydaktyki, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

[52] PŁOCKI A., Dydaktyka stochastyki, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.

[53] PŁOCKI A., Gry Penneya i paradoksy stochastyczne, Matematyka 1 (1999), 12–18.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[54] SHUO-YEN R. L., A Martingale Approach to the Study of Occurrence of Sequence Patterns in Repeated Experiments, The Annals of Probabability, Volume 8, no. 6(1980), 1171-1176.

[55] SIWEK H., Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej, WSiP, Warszawa 2005.

[56] TVERSKY A., KAHNEMAN D., Availability: A heuristic for judging frequency and probability, Cognitive Psychology 5 (1973).

[57] TVERSKY A., KAHNEMAN D., Judgments under uncertainty: Heuristics and Biases, Science 185 (1974).

[58] WALTER H., Heuristische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen, Der Mathematikunterricht, Februar (1983).

[59] WILSON R. J., Wprowadzenie do teorii grafów, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2000.

[60] ZUBRZYCKI S., Wykłady z rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej, PWN, Warszawa 1966.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.