Úlohy využívající stochastické grafy

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Turista s krátkodobou pamětí

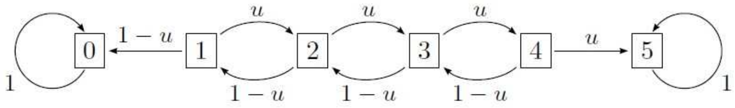
Turista chce navštívit čtyři hlavní města: Prahu, Berlín, Řím a Londýn. První město, které navštíví, náhodně vylosuje (vylosování každého ze čtyř uvedených měst je stejně pravděpodobné). Turista má krátkodobou paměť a pamatuje si jen poslední navštívené město, které z následujícího losování vyřadí. V osudí druhého a všech dalších losování jsou tedy vždy jen tři města (vylosování každého z nich je stejně pravděpodobné). Jaká je střední hodnota počtu měst, které turista navštíví, než bude v každém ze čtyř měst aspoň jedenkrát?

Ruinování hráče

Hráč H_A resp. H_B má k resp. $(m-k)$ Kč ($k, m \in \mathbb{N}$, $m > k$). Hráč H_A vsadí v každé partii 1 Kč, pokud vyhraje, dostane vsazenou korunu zpět a hráč H_B mu vyplatí výhru 1 Kč. Pokud hráč H_A v partii prohraje, dostane vsazenou korunu hráč H_B. Jednotlivou partii vyhraje hráč H_A resp. H_B s pravděpodobností u resp. $(1-u)$. Hráči hrají tak dlouho, dokud jeden z nich neprohraje všechny své peníze (ruinování hráče). Jaká je pravděpodobnost, že bude zruinován hráč H_A resp. H_B. Jaká je střední hodnota počtu partií, které je třeba sehrát, než dojde ke zruinování některého z hráčů?

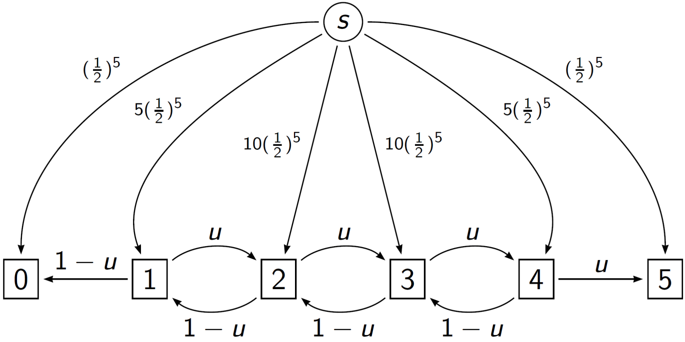
Stav hry po každé partii je jednoznačně určen stavem kapitálu hráče H_A, tj. množstvím korun, které aktuálně vlastní. Postavme na začátku hry figurku do bodu k na číselné ose. Pokud se partii vyhraje hráč H_A, přesuneme figurku o 1 vpravo, pokud v partii zvítězí hráč H_B, posuneme figurku po číselné ose o 1 vlevo. Hra skončí v okamžiku, kdy se figurka dostane buď do bodu m (hráč H_B bude zruinován), nebo do bodu 0 (hráč H_A bude zruinován).

Ruinování hráče - graf



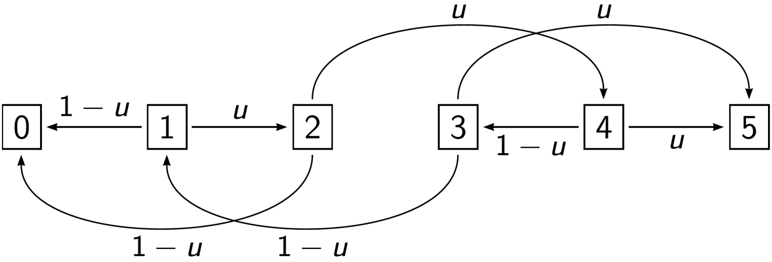
Ruinování hráče s předkolem

Na začátku hry hodíme m korunovými mincemi. Mince, na kterých padne rub budou patřit hráči H_A, zbylé mince dostane hráč H_B. Stochastický graf takového předkola pro $m = 5$ je na obrázku.



Ruinování hráče - riskantní strategie

Uvažujme hru o ruinování hráče za změněných pravidel: před každou partií hráč H_A vsadí tolik korun, aby v případě výhry v této partii byl co možné nejblíže k cílovému stavu m Kč (samozřejmě, že nemůže vsadit větší částku, než kterou aktuálně má). Uvažujte situaci $k = 3$, $m = 5$, $u = \frac{1}{2}$.
Jaká je pravděpodobnost zruinování hráče H_B při této riskantní strategii? Je větší, nebo menší než v při fixní sázce 1 Kč? Jaký je očekávaný (střední) počet partií této hry?



Problém 5.

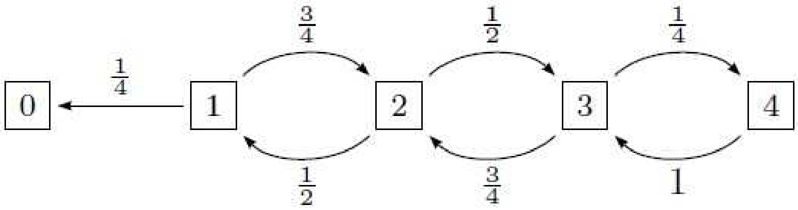
Ehrenfestovo schéma

Urna U_n obsahuje n koulí očíslovaných $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$, $n \in \mathbb{N}$. Stejné koule jsou rozděleny do dvou uren: U_A a U_B. Postupně losujeme (s vracením) vždy jednu kouli z urny U_n. Pokud má vylosovaná koule číslo j, tak přendáme kouli s číslem j z urny, ve které se nachází, do druhé urny. Losování koulí z urny U_n a přesouvání koulí mezi urnami U_A a U_B ukončíme, pokud

- jedna u uren U_A, nebo U_B bude prázdná (1. verze), nebo pokud
- urna U_A bude prázdná (2. verze), nebo pokud
- v obou urnách U_A a U_B bude stejný počet koulí (pro n sudé, 3. verze).

Pro každou verzi a pro $n = 4$, určete střední dobu trvání pokusu (tj. očekávaný počet losování). Pro verze, kde to má smysl určete i odpovídající pravděpodobnosti.

Ehrenfestovo schéma - graf



Losování koulí dvou barev

V urně U je n koulí, b bílých a c červených ($b > 0$ a $c > 0, b + c = n$). Postupně losujeme z urny jednu kouli a místo vylosované koule dáme do urny kouli opačné barvy. Počet červených koulí v urně U interpretujeme jako stav urny. Losování ukončíme, pokud v urně nejsou žádné červené koule. Jaká je střední hodnota počtu vylosovaných koulí z urny U?

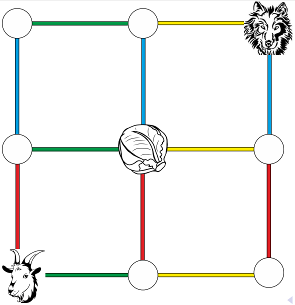
Problém 7.

Losování koulí tří barev

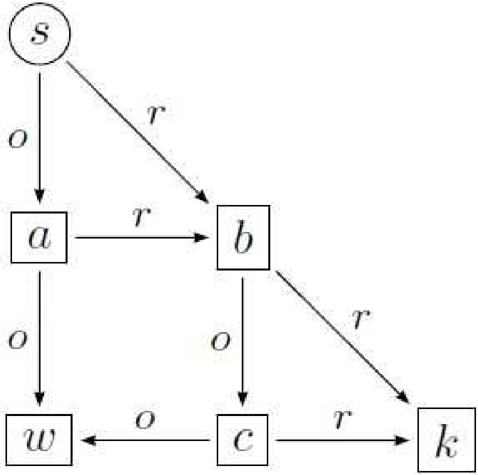
Z urny U, ve které jsou dvě bíle koule, jedna zelená a tři červené losujeme jednu kouli (s vracením) tak dlouho, až bude třikrát vylosována bílá, nebo červená koule. V prvním případě vyhraje hráč H_A, ve druhém případě hráč H_B. Který z hráčů má větší šanci na výhru? Kolik je očekávaný počet vylosovaných koulí v takové hře?

Hra „*Koza-vlk-zelí*"

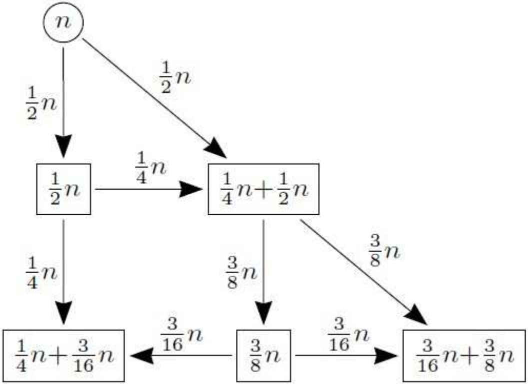
Ke hře, jejíž hrací plátno je na obrázku, potřebujeme ještě urnu se čtyřmi kostkami - ■, ■, ■, ■) a figurku představující kozu. Na začátku hry stojí figurka v uzlu „*koza*". Z urny vylosujeme kostku a podle její barvy posouváme figurku po grafu. Před každým losováním upravujeme složení kostek v urně, tak aby urna obsahovala jen kostky té barvy, které vedou z aktuálního vrcholu, v němž se figurka právě nachází. V případě, že se figurka dostane do uzlu „*zelí*", hra končí a vítězí hráč H_A. Pokud se figurka dostane do uzlu „*vlk*", hra končí vítězstvím hráče H_B. Určete pravděpodobnost výhry obou hráčů. Jaká je střední hodnota počtu vylosovaných kostek (délka trvání hry)?



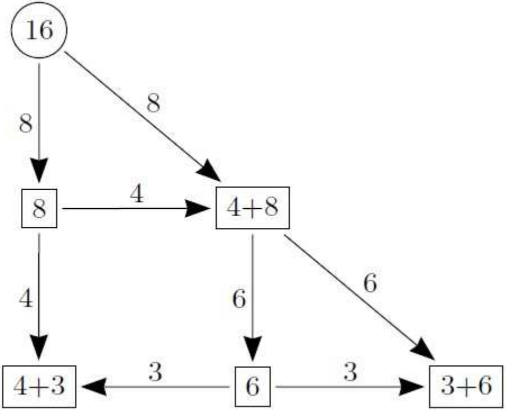
Hra „*Koza-vlk-zelí*" - graf



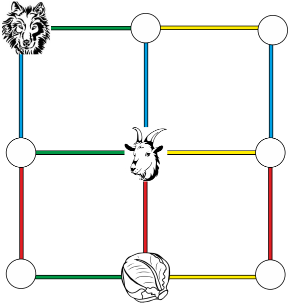
Hra „*Koza-vlk-zelí*"

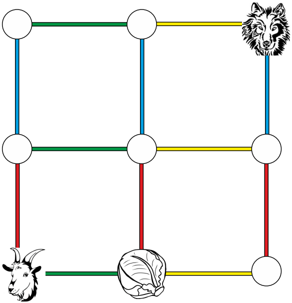


Hra „*Koza-vlk-zelí*" - 16 figurek



Hra „*Koza-vlk-zelí* " - jiné počáteční stavy

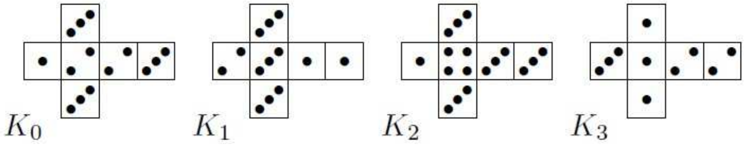




Problém 10.

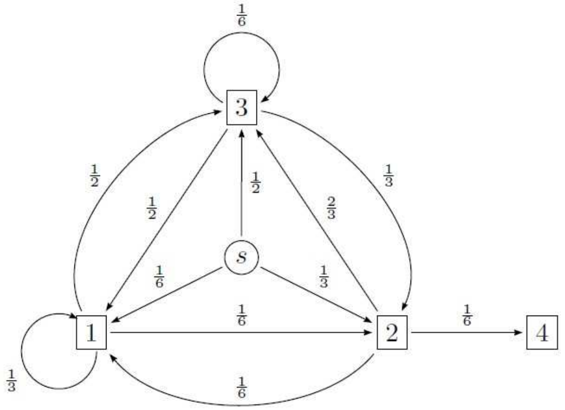
4 kostky

Na obrázku jsou sítě kostek: K_0, K_1, K_2 a K_3. Nejprve se hodí kostkou K_0. Pokud padne j teček, tak v následujícím kole házíme kostkou K_j. Další hody probíhají takto: pokud v daném hodu padlo k teček, $k = 1, 2, 3$, pak se v následujícím hodu hází kostkou K_k, pokud padnou 4 tečky, házení se ukončí. Jaká je střední hodnota počtu hodů při takovém házení?

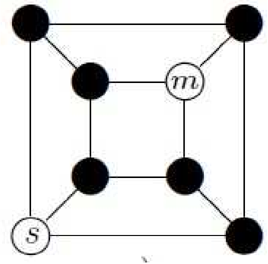


Problém 10.

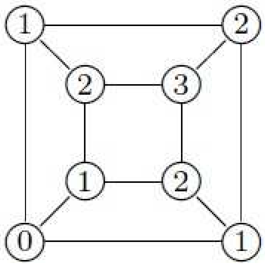
4 kostky - graf



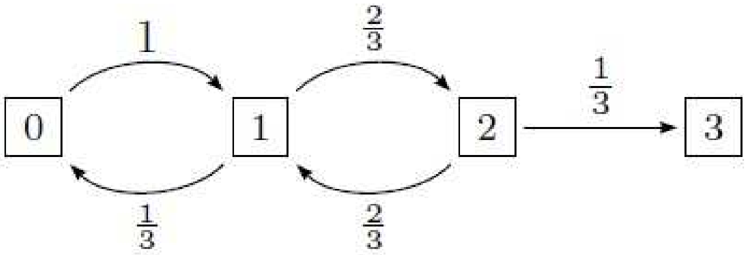
Náhodné bloudění po šestistěnu



Náhodné bloudění po šestistěnu - analogie

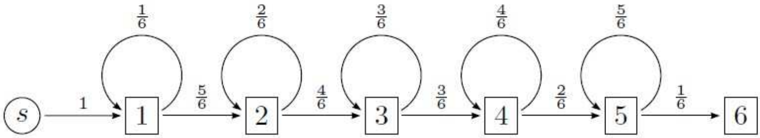


Náhodné bloudění po šestistěnu - graf



Problém 12.

Schéma sběratele - hod kostkou



Problém 13.

Čtyři úspěchy v po sobě