Dofinansowane przez Unię Europejską

PROPER

PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Scenariusze lekcji

GRAFY
STOCHASTYCZNE
(PL)

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

SCENARIUSZE LEKCJI

Lekcja 1-2

Przybliżenie uczniom tematu zajęć, przeprowadzenie pretestu.

Zapoznanie uczniów z drzewem stochastycznym.

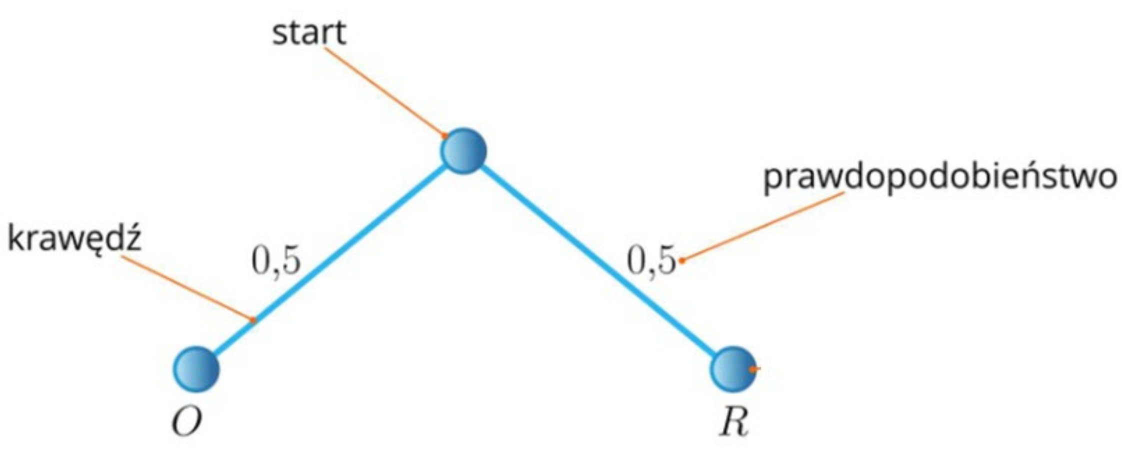
Uczniowie rzucając monetą lub losując kolorowe kule z pudełka zapisują swoje wyniki za pomocą drzewa, opisują własności oraz zalety i wady takiego zapisu oczekując wylosowania konkretnych ilości orłów, reszek, serii orłów i reszek.

Informacje, które przekazujemy uczniom:

Doświadczenie losowe kilkuetapowe wygodnie jest zilustrować za pomocą drzewa doświadczenia losowego (drzewa stochastycznego). Możemy w ten sposób graficznie przedstawić przebieg i wyniki doświadczenia. Rysunek rozpoczynamy od punktu, zwanego startem. Wyniki kolejnych etapów doświadczenia to węzły. Odcinki, które łączą dwa kolejne węzły to krawędzie. Kolejne krawędzie łączące początek drzewa z jednym z końców to gałąź drzewa. Każdej gałęzi odpowiada jeden wynik doświadczenia wieloetapowego.

Ćw. 1

Zbudujemy drzewo stochastyczne dla rzutu monetą.

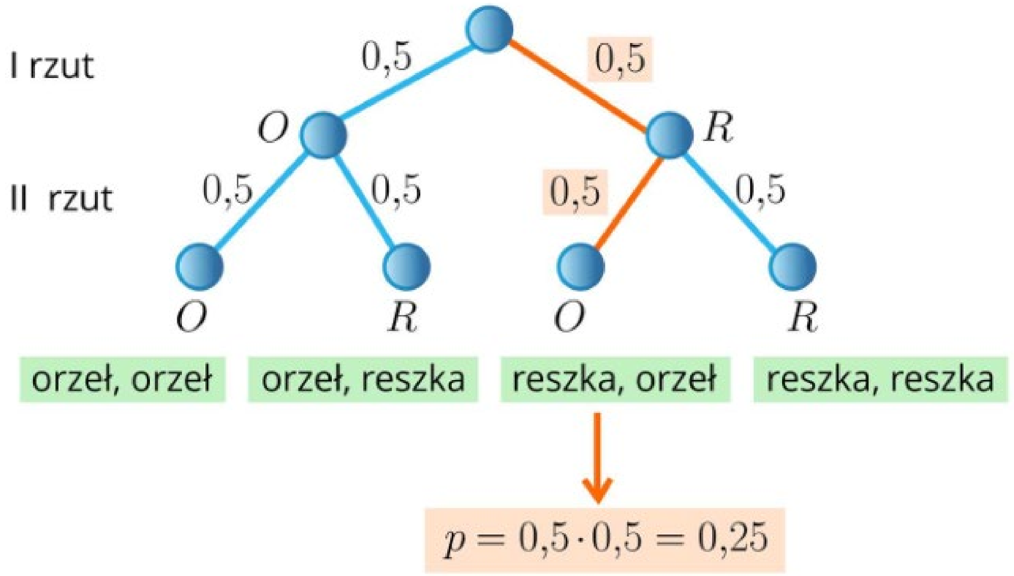


Drzewo składa się z dwóch gałęzi, odpowiadających wynikom (orzeł), (reszka). Na każdej gałęzi zapisane jest prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia (czyli wyrzucenia orła bądź reszki).

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Ćw. 2

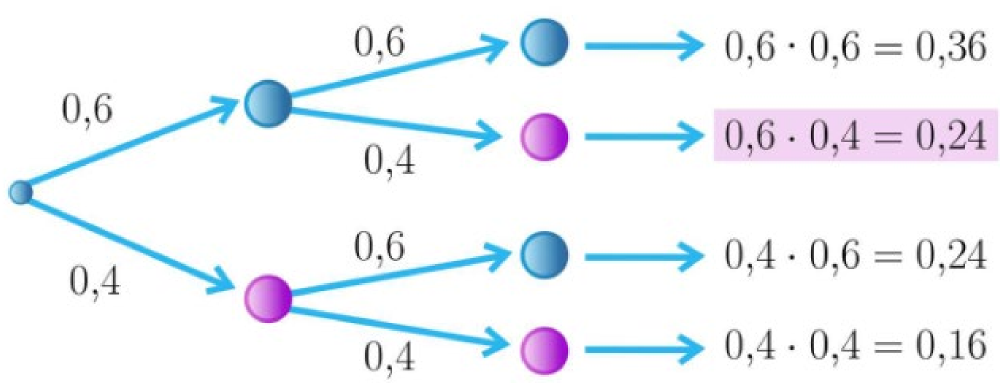
Zbudujemy drzewo stochastyczne dla dwukrotnego rzutu monetą.



Aby obliczyć prawdopodobieństwo na przykład wyrzucenia za pierwszym razem reszki, a za drugim orła (na rysunku tą sytuację ilustruje gałąź pomarańczowa), mnożymy liczby zapisane przy pomarańczowych krawędziach.

Ćw. 3

W urnie znajdują się cztery kule fioletowe i sześć niebieskich. Wyciągamy losowo jedną kulę, zapisujemy jej kolor i z powrotem wrzucamy do urny. Następnie wyciągamy losowo drugą kulę. Obliczymy prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem wyciągniemy kulę niebieską, a za drugim fioletową. Zilustrujemy przebieg doświadczenia za pomocą drzewa.



Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Przy każdej krawędzi zapisaliśmy prawdopodobieństwo zajścia danego zdarzenia.

Zauważmy, że 0,36 + 0,24 + 0,24 + 0,16 = 1, czyli suma prawdopodobieństw zapisanych przy wierzchołkach krawędzi wychodzących z jednego korzenia jest równa 1.

Zdarzenie: za pierwszym razem wylosowaliśmy kulę niebieską, a za drugim fioletową, zilustrowane jest za pomocą dwóch krawędzi tej samej gałęzi. Prawdopodobieństwo zdarzenia obliczamy, mnożąc liczby zapisane przy krawędziach tej gałęzi: p = 0,6 x 0,4 = 0,24.

Odpowiedź: Prawdopodobieństwo, że za pierwszym razem wyciągniemy kulę niebieską, a za drugim fioletową, jest równe 0,24.

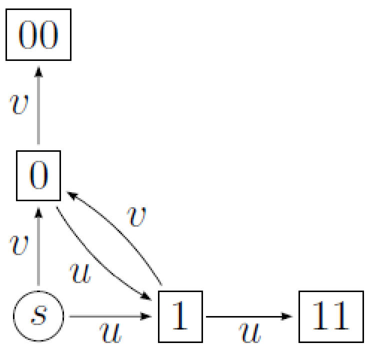
Wiemy już, że prawdopodobieństwo zdarzenia jednoelementowego reprezentowanego przez daną gałąź jest równe iloczynowi prawdopodobieństw wypisanych obok krawędzi tej gałęzi. Ten sposób wyznaczania prawdopodobieństwa zdarzeń jednoelementowych w wieloetapowych doświadczeniach, nazywamy regułą mnożenia prawdopodobieństw dla drzewa stochastycznego.

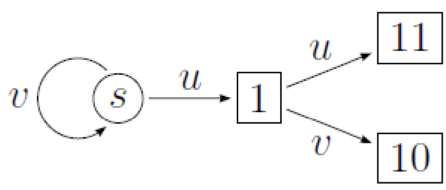
Lekcja 3

Zapoznanie uczniów z grafem stochastycznym, wskazują własności i różnice między drzewem, a grafem stochastycznym.

Przybliżenie uczniom zasady doświadczenia: poszczególni uczniowie rzucając monetą powinni osiągnąć pożądane serie np. 00, 11 lub 10, 11, gdzie 0 oznacza wyrzucenie orła utożsamiane dalej z porażką i 1 oznacza wyrzucenie reszki utożsamiane z sukcesem.

Uczniowie zapisują swoje rzuty za pomocą drzewa, a następnie próbują samodzielnie zapisać i ułożyć z klocków graf stochastyczny. Formułują własności, zalety oraz wady takiego zapisu.





Doświadczenie polegające na wylosowaniu serii 11 lub 10 rozpoczyna się od czekania na pierwszy sukces, po uzyskaniu sukcesu doświadczenie kończy się po kolejnej próbie.

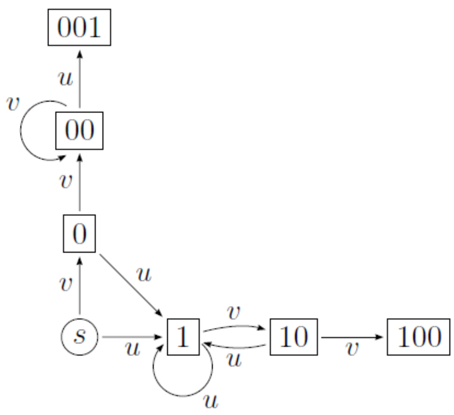
W miarę możliwości czasowych uczniowie oczekują na inne przypadki: pożądane nowe serie to 111 i 110, zapisują graf stochastyczny dla takiego doświadczenia, po czym próbują

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

uogólnić na serie o długości k ($k \in \mathbb{N}_4$), powstałe z serii 11 i 10 przez dopisanie na początku (k-2) jedynek.

Lekcja 4

Uczniowie przeprowadzają doświadczenie polegające na uzyskaniu serii 100 i 001, zapisują graf stochastyczny dla doświadczenia:



Uczniowie formułują wniosek:

Aby czekanie zakończyło się serią 100, sukces musi pojawić się po raz pierwszy nie później niż w drugiej próbie. Doświadczenie zakończy się serią 001, gdy dwie pierwsze próby zakończą się porażką. Zatem:

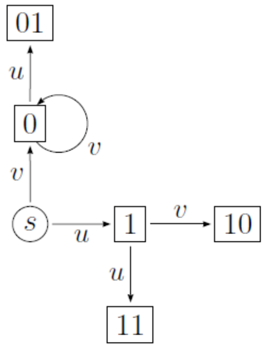
$$P(\ldots 100) = u + vu = 2u - u^2 \qquad \text{oraz} \qquad P(\ldots 001) = v^2 = (1-u)^2.$$

W miarę możliwości czasowych uogólniamy na serie, powstałe przez dopisanie (k-2) zer na końcu serii 10 i na początku serii 01.

Lekcja 5

Uczniowie tworzą niesymetryczny graf stochastyczny czekania na jedną z trzech serii i porażek o długości 2 doświadczenia losowego, np. pożądane serie to 01, 10, 11.

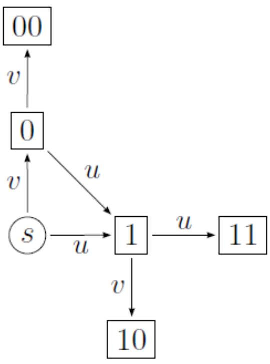
Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.



Z grafu uczniowie wyciągają wnioski, że jeśli próba zakończy się porażką, to z prawdopodobieństwem 1 doświadczenie zakończy się serią 01, jeśli pierwsza próba zakończy się sukcesem, a druga porażką, to doświadczenia kończy się serią 10, jeśli natomiast dwie pierwsze próby zakończą się sukcesem, to doświadczenie kończy się serią 11. Co oznacza, że:

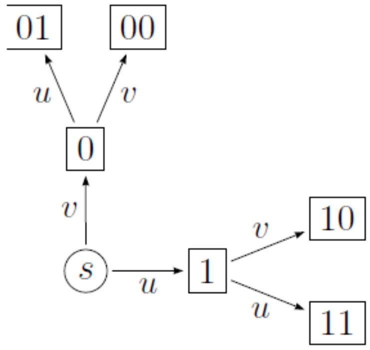
$$P(\ldots 01) = v = 1 - u,\ P(\ldots 10) = uv = u(1-u) \text{ i } P(\ldots 11) = u^2.$$

Kolejny graf jaki tworzą uczniowie to czekanie na serie 00, 11, 10.



Uczniowie tworzą graf przedstawiający doświadczenie czekania na jedną z czterech serii sukcesów i porażek o długości 2.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.



Lekcja 6

Prosimy uczniów o zbudowanie grafu stochastycznego związanego z następującym czekaniem: $\delta^2_{1101-1011-0111}$. Uczniowie ustawiają pionki na starcie i rozpoczynają grę obserwując, który wynik daje największą szansę na zwycięstwo.

Zapoznajemy uczniów z przykładami paradoksalnych własności serii kolorów, w tym serii orłów i reszek oraz serii sukcesów i porażek. Wprowadzamy symbol >>, który oznacza, że dana seria jest „lepsza”, daje większą szansę na wygraną.

Przykład: Weźmy pod uwagę serie sukcesów i porażek: 10, 01 i 00. Wtedy:

$$(10 \approx 01)_{\frac{1}{2}} \wedge (01 \approx 00)_{\frac{1}{2}} \wedge (10 \gg 00)_{\frac{1}{2}}.$$

Przykład: Rozważmy serie sukcesów i porażek: 1101, 1011 i 1101. Wtedy:

$$(1101 \gg 1011)_{\frac{1}{2}} \wedge (1011 \gg 0111)_{\frac{1}{2}} \wedge (0111 \gg 1101)_{\frac{1}{2}},$$

zatem wśród tych serii nie ma najlepszej. Z kolei w czekaniu $\delta^2_{1101-1011-0111}$ jest

$$0111 \gg 1011 \wedge 1011 \gg 1101 \wedge 0111 \gg 1101,$$

a to oznacza, że w kontekście czekania $\delta^2_{1101-1011-0111}$ seria 0111 jest najlepsza (bo jest lepsza od każdej z dwóch pozostałych).

Uczniowie formułują wniosek, np. relacja >> nie jest przechodnia, to z faktu, że gracz G_1 ma większe szanse na zwycięstwo niż gracz G_2 nie wynika, że w grze z udziałem graczy G_1 i G_3 większe szanse na zwycięstwo ma gracz G_1. Również przywilej pierwszeństwa wyboru serii nie zawsze jest przywilejem – gracz wybierający swoją serię jako drugi ma większe szanse na zwycięstwo w grze, jeśli odpowiednio dobierze serię.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Materiały pomocnicze:

1) „Proper, Probability around us probability for everyone" Ireneusz Krech, Pavel Tlust´
2) zpe.gov.pl „Metoda drzew w rachunku prawdopodobieństwa" Justyna Cybulska

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.