PROPER

PROBABILITY AROUND US

PROBABILITY FOR EVERYONE

Příklad 1:

Hráči A a B házejí střídavě mincí a zvítězí ten, kdo první hodí líc. Hráč A hází první. Určete pravděpodobnosti výhry obou hráčů?

1. Řešení:

Hráč A může zvítězit v prvním, třetím, pátém, atd. hodu.

Hráč B může zvítězit ve druhém, čtvrtém, šestém, atd. hodu.

výhra v hodu	nastává s pravděpodobností
1.	$\frac{1}{2}$
2.	$\left(\frac{1}{2}\right)^2$
3.	$\left(\frac{1}{2}\right)^3$
4.	$\left(\frac{1}{2}\right)^4$
$\vdots$	$\vdots$

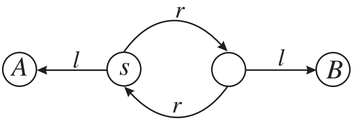
$$P(\text{zvítězí hráč } A) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \ldots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3}.$$

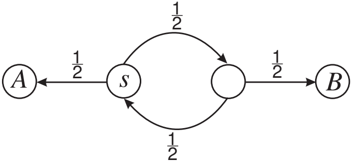
$$P(\text{zvítězí hráč } B) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \ldots = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}.$$

Příklad 1:

Hráči A a B házejí střídavě mincí a zvítězí ten, kdo první hodí líc. Hráč A hází první. Určete pravděpodobnosti výhry obou hráčů?

2. Řešení:





$x-$ pravděpodobnost vítězství A a uvažme dva neslučitelné případy:

- v prvním hodu padne líc (pravděpodobnost $\frac{1}{2}$) a figurka se dostane do uzlu A;
- v prvním a druhém hodu padne rub (pravděpodobnost $\frac{1}{4}$) a figurka se vrátí do uzlu s

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot x, \text{ a tedy } x = \frac{2}{3}.$$

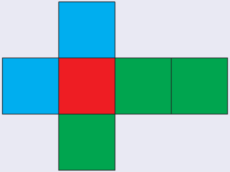
Analogicky hráč B zvítězí s pravděpodobností $\frac{1}{3}$.

Návazné úlohy:

1. Hráči A, B a C házejí střídavě mincí a zvítězí ten, kdo první hodí líc. Nejprve hází mincí hráč A, po něm hráč B, pak hráč C, pak opět A atd. Určete pravděpodobnosti výhry jednotlivých hráčů.

2. Hráči A a B házejí střídavě mincí a zvítězí ten, kdo jako druhý, třetí, $n-$tý hodí líc. Hráč A hází první. Určete pravděpodobnosti výhry obou hráčů?

3. Hráči A, B a C házejí střídavě kostkou, jejíž síť je na obrázku. Zvítězí ten, komu prvnímu padne jeho barva. Nejprve hází mincí hráč A, po něm hráč B, pak hráč C, pak opět A atd. Který z hráčů má největší šanci na výhru?

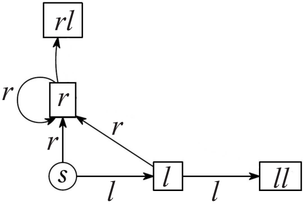


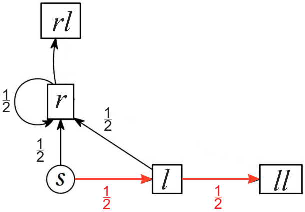
Příklad 2:

ll-rl

Hod mincí bude opakován tak dlouho, až padnou dva líce za sebou (. . . *ll*) – pak zvítězí hráč *A*, nebo líc po rubu (. . . *rl*) – tehdy zvítězí hráč *B*. Který z hráčů má větší šanci na výhru?

Řešení:



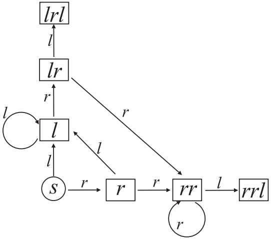


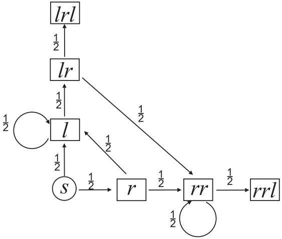
Příklad 3:

lrl-rrl

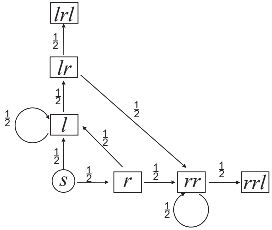
Hod mincí bude opakován tak dlouho, až poslední tři hody utvoří sérii *líc-rub-líc*, pak zvítězí hráč *A*, nebo sérii *rub-rub-líc*, tehdy zvítězí hráč *B*. Který z hráčů má větší šanci na výhru?

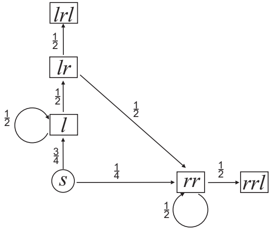
Řešení: (redukce stochastického grafu)

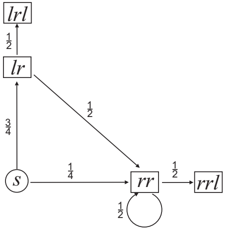


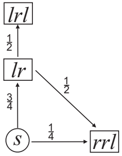


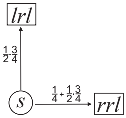
Příklad 3:

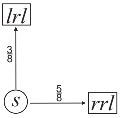

lrl
1/2
lr
1/2
1/2
l
1/2
1/2
1/2
s
1/2
r
1/2
rr
1/2
rrl
1/2


lrl
1/2
lr
1/2
1/2
1/2
l
3/4
s
1/4
rr
1/2
rrl
1/2


lrl
1/2
lr
1/2
3/4
s
1/4
rr
1/2
rrl
1/2


lrl
1/2
lr
1/2
3/4
s
1/4
rrl


lrl
1/2·3/4
s
1/4+1/2·3/4
rrl

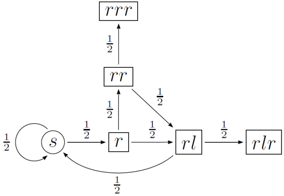

lrl
3/8
s
5/8
rrl

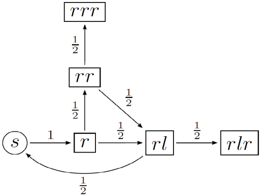
Příklad 4: belgická MO, 1981

rrr-rlr

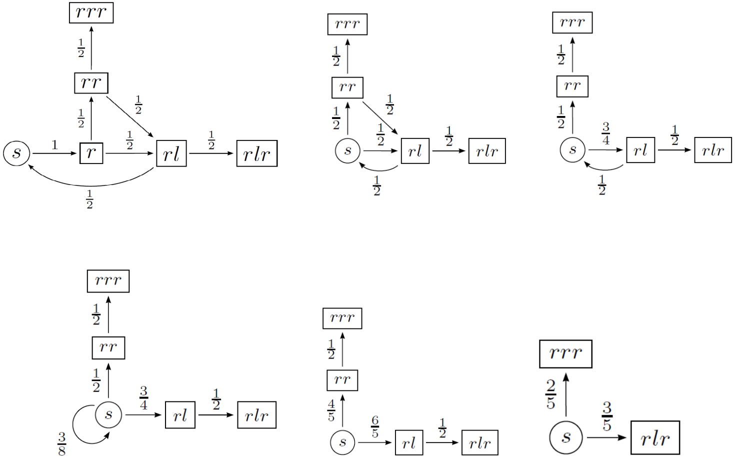
Hráči A a B opakovaně házejí mincí a výsledky hodů zapisují jako posloupnost písmen r, nebo písmeno l. Hráč A se domnívá, že trojice rrr se v takové posloupnosti objeví dříve než trojice rlr. Hráč B si myslí opak. Kdo má pravdu?

1. Řešení: (redukce stochastického grafu)

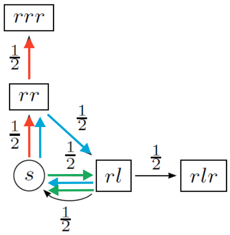




Příklad 4: belgická MO, 1981. $(rrr - rlr)$



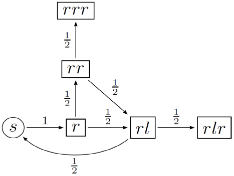
2. Řešení: (s pomocí stochastického grafu)



$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{8}x + \frac{1}{4}x, \qquad x = \frac{2}{5}.$$

Příklad 4: belgická MO, 1981. $(rrr - rlr)$

3. Řešení: (absorbční algoritmus) $\quad p_{a \rightsquigarrow b}, \quad P(A) = p_{s \rightsquigarrow rrr} = ?$



$$p_{rlr \rightsquigarrow rrr} = 0, \qquad p_{rrr \rightsquigarrow rrr} = 1$$

$$\begin{aligned}
p_{s \rightsquigarrow rrr} &= p_{r \rightsquigarrow rrr} \\
p_{r \rightsquigarrow rrr} &= \frac{1}{2} \cdot p_{rr \rightsquigarrow rrr} + \frac{1}{2} \cdot p_{rl \rightsquigarrow rrr} \\
p_{rr \rightsquigarrow rrr} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot p_{rl \rightsquigarrow rrr} \\
p_{rl \rightsquigarrow rrr} &= \frac{1}{2} \cdot p_{s \rightsquigarrow rrr}
\end{aligned}$$

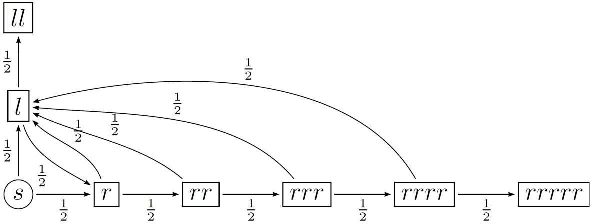
$$P(A) = \tfrac{2}{5}, \qquad P(B) = \tfrac{3}{5}$$

Příklad 5: AIME 1995 - 15. úloha

rrrrr-ll

Označme p pravděpodobnost, že při opakovaném hodu (symetrickou) mincí se objeví posloupnost pěti po sobě jdoucích rubů dříve než posloupnost dvou po sobě jdoucích líců. Hledané p zapíšeme ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Kolik je $m + n$?

Řešení:



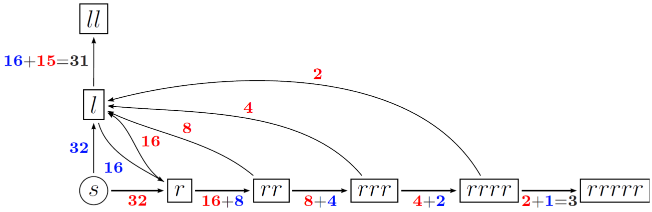
1. absorbční algoritmus
2. stochastický graf a jeho redukce

Příklad 5: AIME 1995 - 15. úloha

rrrrr-ll

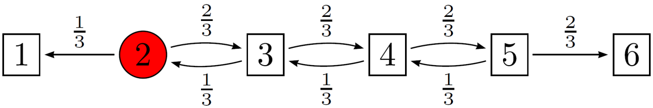
Označme p pravděpodobnost, že při opakovaném hodu (symetrickou) mincí se objeví posloupnost pěti po sobě jdoucích rubů dříve než posloupnost dvou po sobě jdoucích líců. Hledané p zapíšeme ve tvaru $\frac{m}{n}$, kde m a n jsou nesoudělná přirozená čísla. Kolik je $m + n$?

Řešení: (putující figurky - bez vracení)

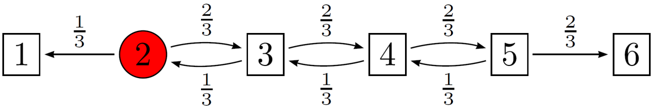


Hráči A a B hrají na desce složené ze šesti polí očíslovaných $1, 2, \ldots, 6$ *následující hru. Na začátku je umístěna na pole s číslem 2 figurka a pak se hází běžnou hrací kostkou. Padne-li číslo dělitelné třemi, posune se figurka na pole s číslem o 1 menším, jinak na pole s číslem o 1 větším. Hra končí vítězstvím hráče A resp. B, dostane-li se figurka na pole s číslem 1 resp. 6. S jakou pravděpodobností zvítězí hráč A?*

Řešení:



Příklad 6: 52. ročník MO, kategorie A



$$
\begin{aligned}
p_{2\rightsquigarrow 1} &= \tfrac{1}{3}\cdot p_{1\rightsquigarrow 1} + \tfrac{2}{3}\cdot p_{3\rightsquigarrow 1}\\
p_{3\rightsquigarrow 1} &= \tfrac{1}{3}\cdot p_{2\rightsquigarrow 1} + \tfrac{2}{3}\cdot p_{4\rightsquigarrow 1}\\
p_{4\rightsquigarrow 1} &= \tfrac{1}{3}\cdot p_{3\rightsquigarrow 1} + \tfrac{2}{3}\cdot p_{5\rightsquigarrow 1}\\
p_{5\rightsquigarrow 1} &= \tfrac{1}{3}\cdot p_{4\rightsquigarrow 1} + \tfrac{2}{3}\cdot p_{6\rightsquigarrow 1}\\
p_{6\rightsquigarrow 1} &= 0\\
p_{1\rightsquigarrow 1} &= 1
\end{aligned}
$$

$P(A) = \frac{15}{31}$, $\qquad P(B) = \frac{16}{31}$