Zadanie o dwóch graczach

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by
the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Problem.

W grze uczestniczy dwóch graczy: G_A oraz G_B. Wykonują oni na przemian rzut monetą. Zwycięża ten z nich, który jako pierwszy wyrzuci reszkę. Grę rozpoczyna gracz G_A. Który z graczy ma większe szanse na zwycięstwo?

Rozwiązanie.

δ- czekanie na reszkę

Rozwiązanie.

δ- czekanie na reszkę

$$\Omega = \{r, or, oor, ooor, oooor, \ldots\}$$

Rozwiązanie.

δ- czekanie na reszkę

$$\Omega = \{r, or, oor, ooor, oooor, \ldots\}$$

ω_k - reszka zostanie wyrzucona w k-tym rzucie, $k = 1, 2, 3, \ldots$

Rozwiązanie.

δ- czekanie na reszkę

$$\Omega = \{r, or, oor, ooor, oooor, \ldots\}$$

ω_k - reszka zostanie wyrzucona w k-tym rzucie, $k = 1, 2, 3, \ldots$

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \ldots\}$$

Rozwiązanie.

$$p(\omega_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

Rozwiązanie.

$$p(\omega_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{aligned} A &= \{\text{reszka zostanie wyrzucona po raz pierwszy w nieparzystym rzucie}\} \\ B &= \{\text{reszka zostanie wyrzucona po raz pierwszy w parzystym rzucie}\} \end{aligned}$$

Rozwiązanie.

$$p(\omega_k) = \left(\frac{1}{2}\right)^k, \quad k = 1, 2, 3, \ldots$$

$$\begin{aligned} A &= \{\text{reszka zostanie wyrzucona po raz pierwszy w nieparzystym rzucie}\} \\ B &= \{\text{reszka zostanie wyrzucona po raz pierwszy w parzystym rzucie}\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= \{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \ldots\} \\ B &= \{\omega_2, \omega_4, \omega_6\} \end{aligned}$$

Rozwiązanie.

$$P(A) = p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) + \cdots =$$

Rozwiązanie.

$$\begin{aligned} P(A) &= p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) + \cdots = \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots \end{aligned}$$

Rozwiązanie.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) + \cdots = \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{3}
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie.

$$
\begin{aligned}
P(A) &= p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) + \cdots = \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \cdots = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{2}{3} \\
P(B) &= p(\omega_1) + p(\omega_3) + p(\omega_5) + \cdots = \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^6 + \cdots = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1-\frac{1}{4}} = \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

Rozwiązanie.

Gracz G_A zwycięży w grze, gdy zajdzie zdarzenie A.

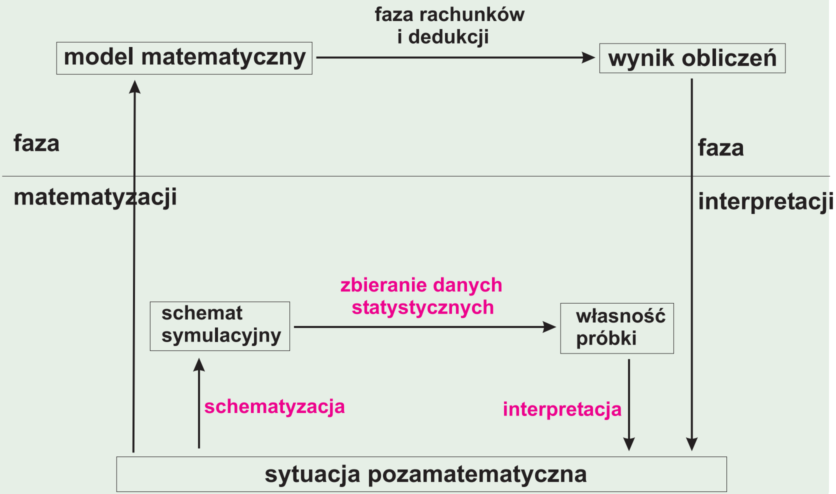
Gracz G_B zwycięży w grze, gdy zajdzie zdarzenie B.

Ponieważ

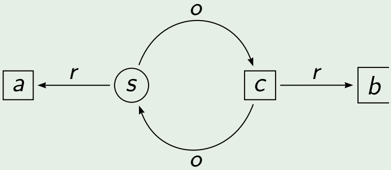
$$\frac{2}{3} = P(A) > P(B) = \frac{1}{3},$$

to większe szanse na zwycięstwo ma gracz G_A.

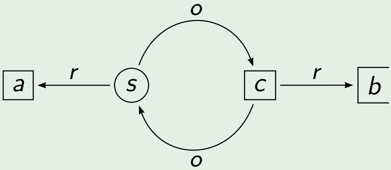
Schemat - trzy fazy rozwiązywania zadania.



Graf stochastyczny.

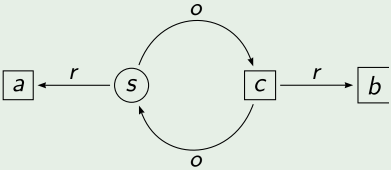


Graf stochastyczny.



Niech $x = P(A)$.

Graf stochastyczny.



Niech $x = P(A)$. Z reguły mnożenia

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x,$$

Graf stochastyczny.

$$\begin{tikzcd} \boxed{a} & s \arrow[l, "r"'] \arrow[r, bend left, "o"] & \boxed{c} \arrow[l, bend left, "o"] \arrow[r, "r"] & \boxed{b} \end{tikzcd}$$

Niech $x = P(A)$. Z reguły mnożenia

$$x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot x,$$

skąd

$$x = \frac{2}{3} = P(A).$$

Gra z udziałem trzech graczy.

δ - ???

Gra z udziałem trzech graczy.

δ - ???