Grafy stochastyczne
Algorytmy

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definicja.

Grafem skierowanym albo digrafem nazywamy parę $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$, gdzie $\mathcal{S} = \{w_0, w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}\}$ jest dowolnym co najmniej dwuelementowym zbiorem $(s > 1)$, a $\mathrm{Q}_{0-1} = [q_{jk}]$ jest niezerową macierzą kwadratową stopnia s o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, a więc macierzą zero-jedynkową.

Definicja.

Grafem skierowanym albo digrafem nazywamy parę $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$, gdzie $\mathcal{S} = \{w_0, w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}\}$ jest dowolnym co najmniej dwuelementowym zbiorem ($s > 1$), a $\mathrm{Q}_{0-1} = [q_{jk}]$ jest niezerową macierzą kwadratową stopnia s o wyrazach ze zbioru $\{0, 1\}$, a więc macierzą zero-jedynkową.

Elementy zbioru $\mathcal{S}$ nazywamy węzłami grafu, a macierz Q_{0-1} nazywamy macierzą przejść.

Jeśli $q_{jk} = 1$, to parę (w_j, w_k), gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazywamy łukiem i oznaczamy $w_j \longrightarrow w_k$. Węzeł w_j nazywamy początkiem, a węzeł w_k – końcem tego łuku. Jeśli $q_{jj} = 1$, to łuk $w_j \longrightarrow w_j$ nazywamy pętlą.

Jeśli $q_{jk} = 1$, to parę (w_j, w_k), gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazywamy łukiem i oznaczamy $w_j \longrightarrow w_k$. Węzeł w_j nazywamy początkiem, a węzeł w_k – końcem tego łuku. Jeśli $q_{jj} = 1$, to łuk $w_j \longrightarrow w_j$ nazywamy pętlą.

Jeśli węzeł w_j jest początkiem tylko i wyłącznie pętli, to nazywamy go węzłem brzegowym.

Jeśli $q_{jk} = 1$, to parę (w_j, w_k), gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazywamy łukiem i oznaczamy $w_j \to w_k$. Węzeł w_j nazywamy początkiem, a węzeł w_k – końcem tego łuku. Jeśli $q_{jj} = 1$, to łuk $w_j \to w_j$ nazywamy pętlą.

Jeśli węzeł w_j jest początkiem tylko i wyłącznie pętli, to nazywamy go węzłem brzegowym.

Zbiór wszystkich węzłów brzegowych grafu skierowanego nazywamy brzegiem grafu skierowanego.

Jeśli $q_{jk} = 1$, to parę (w_j, w_k), gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazywamy łukiem i oznaczamy $w_j \longrightarrow w_k$. Węzeł w_j nazywamy początkiem, a węzeł w_k – końcem tego łuku. Jeśli $q_{jj} = 1$, to łuk $w_j \longrightarrow w_j$ nazywamy pętlą.

Jeśli węzeł w_j jest początkiem tylko i wyłącznie pętli, to nazywamy go węzłem brzegowym.

Zbiór wszystkich węzłów brzegowych grafu skierowanego nazywamy brzegiem grafu skierowanego.

Przejściem z węzła w_j do węzła w_k nazywamy każdy ciąg łuków taki, że początkiem pierwszego łuku jest węzeł w_j, końcem ostatniego jest węzeł w_k i początek każdego następnego łuku jest zarazem końcem poprzedniego.

Jeśli $q_{jk} = 1$, to parę (w_j, w_k), gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazywamy łukiem i oznaczamy $w_j \to w_k$. Węzeł w_j nazywamy początkiem, a węzeł w_k – końcem tego łuku. Jeśli $q_{jj} = 1$, to łuk $w_j \to w_j$ nazywamy pętlą.

Jeśli węzeł w_j jest początkiem tylko i wyłącznie pętli, to nazywamy go węzłem brzegowym.

Zbiór wszystkich węzłów brzegowych grafu skierowanego nazywamy brzegiem grafu skierowanego.

Przejściem z węzła w_j do węzła w_k nazywamy każdy ciąg łuków taki, że początkiem pierwszego łuku jest węzeł w_j, końcem ostatniego jest węzeł w_k i początek każdego następnego łuku jest zarazem końcem poprzedniego.

Każde przejście z węzła startowego do węzła brzegowego w_j nazywamy trasą prowadzącą do węzła brzegowego w_j.

Niech $[\mathcal{S}, \mathsf{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym. Interpretujmy węzły grafu jako punkty płaszczyzny.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym. Interpretujmy węzły grafu jako punkty płaszczyzny.

Jeżeli $q_{jk} = 1$, gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, to łuk $w_j \to w_k$ przedstawiamy jako zorientowany odcinek prostej lub krzywej o początku w punkcie w_j oraz końcu w punkcie w_k.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym. Interpretujmy węzły grafu jako punkty płaszczyzny.

Jeżeli $q_{jk} = 1$, gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, to łuk $w_j \to w_k$ przedstawiamy jako zorientowany odcinek prostej lub krzywej o początku w punkcie w_j oraz końcu w punkcie w_k.

W punkcie, który reprezentuje węzeł grafu będziemy (w prostokątnej ramce) umieszczać jego etykietę.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym. Interpretujmy węzły grafu jako punkty płaszczyzny.

Jeżeli $q_{jk} = 1$, gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, to łuk $w_j \rightarrow w_k$ przedstawiamy jako zorientowany odcinek prostej lub krzywej o początku w punkcie w_j oraz końcu w punkcie w_k.

W punkcie, który reprezentuje węzeł grafu będziemy (w prostokątnej ramce) umieszczać jego etykietę.

Jeżeli w_j jest węzłem brzegowym, to pętlę $w_j \rightarrow w_j$ pomijamy.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$ będzie grafem skierowanym. Interpretujmy węzły grafu jako punkty płaszczyzny.

Jeżeli $q_{jk} = 1$, gdzie $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, to łuk $w_j \to w_k$ przedstawiamy jako zorientowany odcinek prostej lub krzywej o początku w punkcie w_j oraz końcu w punkcie w_k.

W punkcie, który reprezentuje węzeł grafu będziemy (w prostokątnej ramce) umieszczać jego etykietę.

Jeżeli w_j jest węzłem brzegowym, to pętlę $w_j \to w_j$ pomijamy.

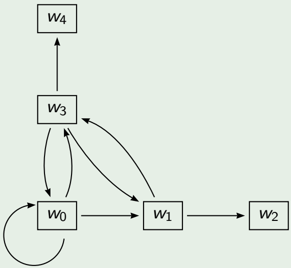
Mówimy tu o ikonicznej prezentacji grafu $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}_{0-1}]$.

Niech $\mathcal{S}=\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ oraz

$$Q_{0-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Niech $\mathcal{S}=\{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4\}$ oraz

$$Q_{0-1}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$



Definicja.

Macierz kwadratową $Q = [p_{jk}]$, gdzie $j, k = 0, 1, 2, \ldots, s-1$ oraz $s \in \mathbb{N}_2$, nazywamy macierzą stochastyczną stopnia s, jeśli:

$$\forall j, k \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\} \;\; [p_{jk} \in \langle 0, 1 \rangle]$$

oraz

$$\forall j \in \{0, 1, 2, \ldots, s-1\} \;\; \left[\sum_{k=0}^{s-1} p_{jk} = 1 \right].$$

Niech Q będzie macierzą stochastyczną stopnia s. Rozważmy przekształcenie f określone na zbiorze wszystkich macierzy stochastycznych, o wartościach w zbiorze wszystkich niezerowych macierzy zero-jedynkowych, które macierzy stochastycznej $Q = [p_{jk}]$ przyporządkowuje macierz zero-jedynkową $f(Q) = Q_{0-1} = [q_{jk}]$, gdzie

$$q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{gdy } p_{jk} > 0, \\ 0, & \text{gdy } p_{jk} = 0. \end{cases}$$

Definicja.

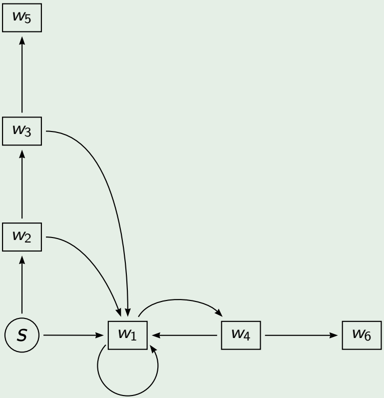
Niech $\mathcal{S}$ będzie niepustym, s-elementowym zbiorem, a Q macierzą stochastyczną stopnia s. Jeżeli para $[\mathcal{S}, f(\mathrm{Q})]$ jest grafem skierowanym, to parę $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ nazywamy grafem stochastycznym.

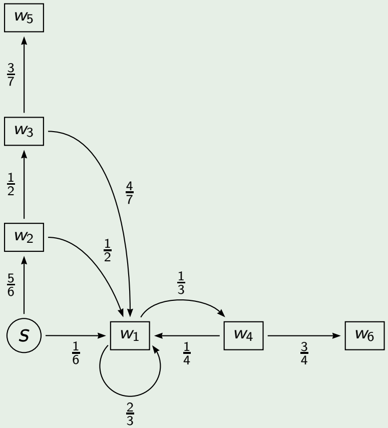
Definicja.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ będzie grafem stochastycznym, gdzie $\mathrm{Q} = [p_{jk}]$ oraz niech $w_j, w_k \in \mathcal{S}$. Jeżeli $\mathrm{Q}(w_j, w_k) = p_{jk} > 0$, to liczbę p_{jk} nazywamy wagą łuku $w_j \to w_k$.

Jeśli z jest przejściem na grafie $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$, to iloczyn wag kolejnych łuków tego przejścia nazywamy wagą przejścia z i oznaczamy przez $w(z)$.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ będzie grafem stochastycznym, gdzie $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, w_3, \ldots, w_{s-1}\}$ i niech $\mathrm{Q} = [p_{jk}]$. Rozważmy ikoniczną prezentację grafu skierowanego $[\mathcal{S}, f(\mathrm{Q})]$ i przypiszmy każdemu łukowi $w_j \rightarrow w_k$ na tym grafie wagę p_{jk}. Graf z tak przypisanymi liczbami dodatnimi jest prezentacją ikoniczną grafu stochastycznego $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$.


w_5
w_3
w_2
s
w_1
w_4
w_6


w_5
$\frac{3}{7}$
w_3
$\frac{4}{7}$
$\frac{1}{2}$
w_2
$\frac{1}{2}$
$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{3}$
S
w_1
w_4
w_6
$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$
$\frac{3}{4}$
$\frac{2}{3}$

Definicja.

Niech Ω_G będzie zbiorem wszystkich tras na grafie stochastycznym $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$, a p_G funkcją, która każdej trasie przypisuje jej wagę. Funkcja p_G jest rozkładem prawdopodobieństwa na zbiorze Ω_G. Parę (Ω_G, p_G) nazywamy przestrzenią probabilistyczną indukowaną przez graf.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ będzie grafem stochastycznym oraz $V_1 \subset V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ będzie grafem stochastycznym oraz $V_1 \subset V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$.

Symbol $p_{j \rightsquigarrow V_1}$ oznacza wagę zbioru wszystkich przejść z węzła w_j do węzłów zbioru V_1.

Niech $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ będzie grafem stochastycznym oraz $V_1 \subset V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$.

Symbol $p_{j \rightsquigarrow V_1}$ oznacza wagę zbioru wszystkich przejść z węzła w_j do węzłów zbioru V_1.

Liczba $p_{j \rightsquigarrow V_1}$ jest prawdopodobieństwem dotarcia błądzącego po grafie pionka z węzła w_j do jednego z węzłów brzegowych ze zbioru V_1.

Algorytm pochłaniania

Układ warunków:

1) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = 1$ dla $w_j \in V_1$,

2) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = 0$ dla $w_j \in V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}] \setminus V_1$,

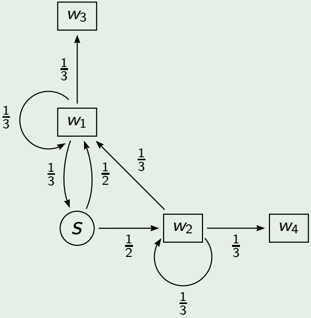
3) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = \sum_{w_k} p_{jk} \cdot p_{k\rightsquigarrow V_1}$ dla $w_j \notin V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich węzłach dla których $p_{jk} > 0$,

nazywamy algorytmem pochłaniania.

Ten algorytm pozwala obliczyć prawdopodobieństwo $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ poprzez rozwiązanie pewnego układu równań liniowych.

Przykład.

Rozważmy następujący graf stochastyczny:



Przykład.

Przyjmując $V_1 = \{w_3\}$ i stosując algorytm pochłaniania, otrzymujemy układ równań

$$\begin{cases} p_{s \rightsquigarrow \{w_3\}} = \frac{1}{2} \cdot p_{1 \rightsquigarrow \{w_3\}} + \frac{1}{2} \cdot p_{2 \rightsquigarrow \{w_3\}}, \\ p_{1 \rightsquigarrow \{w_3\}} = \frac{1}{3} \cdot p_{1 \rightsquigarrow \{w_3\}} + \frac{1}{3} \cdot p_{s \rightsquigarrow \{w_3\}} + \frac{1}{3} \cdot p_{3 \rightsquigarrow \{w_3\}}, \\ p_{2 \rightsquigarrow \{w_3\}} = \frac{1}{3} \cdot p_{1 \rightsquigarrow \{w_3\}} + \frac{1}{3} \cdot p_{2 \rightsquigarrow \{w_3\}} + \frac{1}{3} \cdot p_{4 \rightsquigarrow \{w_3\}}, \\ p_{3 \rightsquigarrow \{w_3\}} = 1, \\ p_{4 \rightsquigarrow \{w_3\}} = 0, \end{cases}$$

z którego wynika, że

$$p_{s \rightsquigarrow \{w_3\}} = \frac{3}{5}.$$

Niech T_{w_j} oznacza czas błądzenia po grafie stochastycznym $[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$ rozpoczynającego się w węźle w_j.

Zmienna losowa T_{w_j} każdemu przejściu z węzła w_j na brzeg grafu przypisuje jego długość (liczbę łuków przejścia). Załóżmy, że dla każdego węzła w_j istnieje $E(T_{w_j})$. Niech $E(T_{w_j}) = e_{w_j}$.

Algorytm średniego czasu błądzenia po grafie

Układ warunków:

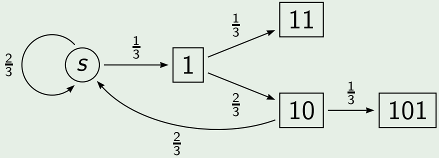
1) $e_{w_j} = 0 \quad \text{dla } w_j \in V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$,

2) $e_{w_j} = 1 + \sum\limits_{w_k} p_{jk} e_{w_k} \quad \text{dla } w_j \notin V[\mathcal{S}, \mathrm{Q}]$, gdzie sumowanie odbywa się po wszystkich węzłach dla których $p_{jk} > 0$,

nazywamy algorytmem średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym z niepustym brzegiem.

Przykład.

Rozważmy graf stochastyczny z rysunku



Przykład.

Stosując algorytm średniego czasu błądzenia po grafie stochastycznym dostajemy układ równań

$$\begin{cases} e_s &= 1 + \frac{2}{3}e_s + \frac{1}{3}e_1, \\ e_1 &= 1 + \frac{1}{3}e_{11} + \frac{2}{3}e_{10}, \\ e_{10} &= 1 + \frac{2}{3}e_s + \frac{1}{3}e_{101}, \\ e_{11} &= 0, \\ e_{101} &= 0, \end{cases}$$

po rozwiązaniu którego otrzymujemy, że

$$e_s = 8,4.$$