Dofinansowane przez Unię Europejską

PROPER

PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Materiały do przygotowania scenariuszy lekcji

GRAFY STOCHASTYCZNE (CZ)

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

PROPER

PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by
the European Union

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Studijní text

Stochastické grafy

Ireneusz Krech, Pavel Tlustý

PROPER
PROBABILITY AROUND US
PROBABILITY FOR EVERYONE

Co-funded by
the European Union

1 Úvod

1.1 Intuice v počtu pravděpodobnosti

Bádání v matematice není výsledkem pouze čisté dedukce či objevování nejrůznějších analogií, ale též induktivního myšlení (viz [25]). Formální utváření matematických pojmů vychází z intuitivních představ. Abstrakce a schematismus ve výuce matematiky někdy brání „vidění, vnímání” obecné podstatě matematických konstrukcí, kvantitativních a prostorových vztahů. Správná intuice, zdravý úsudek stojí na počátku všech objevů, myšlenek, tvrzení či hypotéz.

Freudenthal dlouho zaměňoval slovo „intuice” výrazy jako „rozvoj či zdokonalování matematických představ (viz [8]). Dělal to záměrně zejména s ohledem na odlišnosti významu slova intuice v různých jazycích. Freudenthal též uvádí (viz [9]), že „intuice bez pojmů je prázdná, zatímco pojmy bez intuice jsou slepé.”

Stochastická intuice je schopnost vytvářet určité závěry a rozhodnutí pravděpodobnostní a statistické povahy bez vědomého závěru, nebo dokonce bez znalosti pojmů a vět, které tyto závěry či rozhodnutí odůvodňují. Je to schopnost či kognitivní proces, který spočívá v přesném posouzení pravděpodobnostních vlastností souboru (pravděpodobnost události, očekávaná hodnota, rozložení, stochastická nezávislost) nebo populace na základě (neúplných) informací o vzorku, které nejsou plně podloženy vědomým uvažováním a odůvodněním, ale vycházejí jen z vlastních znalostí a zkušeností.

Závěry intuitivní povahy jsou závěry, které se nám zdají samozřejmé, které formulujeme okamžitě, téměř bez hlubšího zamyšlení, bez dedukce a úvah. Jde o argumentace a na základě v paměti zachovaných představ, schémat a modelů z již dříve řešených situací. Intuitivní myšlení je přemýšlení o abstraktní situaci prostřednictvím jejího konkrétního modelu (srv. [19]).

V [33], [34] a [35] se uvádí výsledky bádání psychologů A. Tverského a D. Kahnemana, z kterých vyplývá, že lidé nemají správně utvořené pravděpodobnostní intuice. Cestou evoluce člověk nebyl vybaven ani základní pravděpodobnostní intuicí.

Chyby a nesprávné závěry v matematice mohou být způsobeny způsobeny nedostatkem základních znalostí. V oblasti pravděpodobnosti, statistiky nebo kombinatoriky, je navíc častou příčinou chyb i nesprávné osvojení základních poznatků. Formalizovaná přednáška v žádném případě nemůže napravit chybné představy a nesprávné intuice. Mylné intuice mohou mít i psychologické důvody. Ukazuje se, že formální vysvětlení pravidel pro výpočet pravděpodobnosti a statistiky nestačí k odstranění těchto „mylných představ" v procesu pravděpodobnostního předpovídání, které psychologie považuje za důležitý psychologický předrozhodovací proces. Z výzkumu psychologů vyplývá, že v tomto procesu předpovídání lidé nepoužívají jen pravděpodobnostní teorii, ale spíše používají určitá pravidla, pojmy a určité strategie.

Tversky a Kahneman zkoumali základ mylných představ (mylných intuicí) v situacích týkajících se hodnocení pravděpodobnosti. Poukazují na rozdíly mezi subjektivní pravděpodobností (tj. odhad pravděpodobnosti udávaný člověkem jako jeho odhad pravděpodobnosti události) a objektivní, normativní pravděpodobností, tedy vyplývající z pravděpodobnostního modelu. Výzkum probíhal v rámci jejich přednášek o problémech výuky matematiky. Zkoumalo se chování lidí různého věku a různých profesí při řešení specifických stochastických otázek.

Z výzkumů J. M. Shaughenessy vyplývá, že velkou roli při rozvoji správných stochastických intuicí, které se projevují ve správném uplatňování heuristických strategií, má osobní kontakt člověka s empirií (losování a sestavování statistik, používání konečných údajů, např. výsledků číselných her, stanovení četnosti, konfrontace hodnocení a posteriori s hodnocením a priori). Tyto studie potvrzují, že výuka počtu pravděpodobnosti je příliš formalizovaná, izolovaná od matematických statistik, opomíjí empirický aspekt pravděpodobnostních pojmů, opomíjí také některé klasické paradoxy. Avšak jen pouhé seznámení, ukázky stochastických paradoxů nijak neodstraňuje mylné intuice. Kahneman a Tversky poukazují na to, že stejné chyby dělají žáci „stochasticky naivní" (tj. bez základních stochastických znalostí), jak i dospělí, kteří mají dokonce za sebou kurz pokročilého, ale formalizovaného počtu pravděpodobnosti.

1.2 Funkční výuka matematiky

Funkční přístup ke vzdělávání je jednou ze základních strategií didakticky správného vyučovacího procesu. V matematice ho lze jej interpretovat jako strategii objevování a vytváření matematických pojmů a jejich vztahů žáky (viz [29]). Funkční výuka je univerzální metoda, doporučuje se ve výuce různých předmětů, ale v matematice - vzhledem k abstraktní a operativní povaze matematických pojmů - má zvláštní význam. V funkční výuce se snažíme ukazovat matematiku z pojmové stránky, ne jen pravidla a algoritmy, jak tomu bylo v mechanickém konceptu. Důležité je zde vybudování správných představ a základních pojmů. Vlastní matematické definice, tvrzení a pokročilejší úvahy přicházejí až později, jako souhrn a výsledek zjištění různorodých

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

činností. V integrovaném konceptu matematika vyrůstá z praxe, z reálných situací i když v některých případech musí být výchozím bodem pro matematické pojmy jevy a podněty okolního prostředí. Vedle reálných situací to mohou být uměle vytvořené situace, využívající speciální didaktické prostředky, ale i čistě abstraktní problémy. Učitelé se snaží o to, aby byly matematické pojmy srozumitelné, aby byly v souladu s odbornými pojmy. Základem matematické činnosti žáka je vědomí, kde se „matematická stavba" a on nachází. Prvořadým cílem je, aby žák získal požadované znalosti nikoli chaotickými pokusy řešit schématické úkoly či příliš volnou „tvorbu", ale na základě jeho dobře naplánované činnosti. Pouze kvalifikovaný učitel, který dobře zná metodiku výuky, vzdělávací proces správně naplánuje. Výsledkem je, že se v mysli žáka vytvářejí další vědomostní prvky s důrazem na „matematickou aktivitu, na činnost v matematickém světě" a jeho vztah k realitě, k tvůrčím zkušenostem, které žák získává postupně při řešení úkolů (viz [19]).

Ve funkčním přístupu se uplatňuje konstruktivní přístup, kdy si žák vytváří své znalosti v integraci s materiály, různými úkoly, prostřednictvím bohatých zkušeností, pod vedením učitele a ve spolupráci s spolužáky a svým okolí. Nejedná se však o povrchní formování matematických pojmů, které vede pouze k odpovědím na otázky typu „Co to je?". Nýbrž aktivní znalost metod a technik umožní řešit problémy typu „Proč má daný objekt právě takové vlastnosti?" nebo „Jak lze zkonstruovat ...?". Tento přístup je plně v souladu s četnými výzkumy včetně a myšlenkami J. Piageta. Ten prosazuje představu, že základní podmínkou pro celý proces utváření intelektu, zejména v předmětech, které do vědy zavádějí, je používání aktivních metod umožňujících spontánní vyhledávání a vyžadujících, aby každá pravda, kterou je třeba objevit, byla znovu objevena žákem nebo alespoň přehrávána, nejen mu předána.

1.3 Počet pravděpodobnosti a stochastické hry

Oblast matematiky zahrnující pravděpodobnost a statistiku je nedílnou součástí studia v každé fázi vzdělávání učitelů matematiky. Učitelům matematiky však velmi často chybí konkrétní nástroje pro zavádění pravděpodobnostních pojmů v praxi, tj. ve školské matematice. Předkládáme zde konkrétní didaktický návrh je zavádět stochastické pojmy na základě náhodných her, které s sebou nesou mnoho stochastických paradoxů. Řešení různých problémů spojených s těmito hrami vede k správnému pochopení základních vlastností a získání správných intuicí. Díky paradoxům, které se v takových hrách objevují, lze budovat didaktické situace, které slouží k vyvolání didaktické reflexe u učitelů i žáků. Setkáváme se s problémem, že i dobře vzdělaní učitelé matematiky, kteří mají velké matematické znalosti, obvykle potřebují další odborné znalosti, aby byli schopni při výuce pravděpodobnosti před svými žáky dobře obstát. Obecné zásady výuky, které jsou účinné v jiných oborech matematiky, nebudou vždy účinné při výuce pravděpodobnosti. Situace je pro učitele základních a středních škol velkou výzvou. Učitelé sice nepotřebují vysokou úroveň matematických znalostí, ale potřebují hluboké pochopení základních pojmů matematiky, které ve školách učí, včetně hlubokého pochopení vzájemných vazeb a vztahů mezi různými aspekty těchto znalostí (viz [20]).

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

V [1] byly popsány další prvky potřebné v odborných znalostech učitelů:

(a) Epistemologie: Epistemologické úvahy o významu pojmů pro výuku, např. různé významy pravděpodobnosti (viz [2]);

(b) Poznání: Předvídání obtíží při učení žáků, chyb, překážek a strategií;

(c) Pedagogické prostředky a metody: Zkušenosti s dobrým výběrem příkladů a didaktických situací a nástrojů; schopnost kriticky analyzovat učebnice, učební osnovy, dokumenty; schopnost přizpůsobit statistiky různým úrovním výuky;

(d) Schopnost zapojit a zaujmout žáky, zohledňovat jejich postoje a přesvědčení;

(e) interakce: Možnost vytvořit dobrou komunikaci ve třídě a používat hodnocení jako způsob vydávání pokynů.

Velkou roli při výuce pravděpodobnosti hrají klasické paradoxy. Díky paradoxům je možné organizovat některé didaktické aktivity zaměřené na učitele matematiky. Cílem těchto opatření je vyvolat u učitelů zamyšlení nad základními stochastickými pojmy. Tato opatření pomáhají učitelům porozumět obtížím a překážkám žáků a umožňují jim rozvíjet vlastní metodickou a didaktickou základnu.

Zavedení stochastického grafu do výuky počítání pravděpodobností má tyto správné stochastické intuice vytvářet, vzdělávat a odpovídajícím způsobem rozvíjet.

2 Vybrané partie z počtu pravděpodobnosti

2.1 Diskrétní pravděpodobnostní prostor, náhodná veličina

Předmětem počtu pravděpodobnosti je konstruování a zkoumání pravděpodobnostních prostorů. Takovým prostorem (ve smyslu Kolmogorovovi axiomatické definice) je trojice $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$, kde Ω je libovolná neprázdná množina, $\mathcal{Z}$ je σ-algebra na množině Ω a P konečná míra na $\mathcal{Z}$ (viz [26], str. 261). Množinu Ω nazýváme množinou elementárních jevů, její prvky elementárními jevy. Prvky množiny $\mathcal{Z}$ nazýváme jevy, jev $\emptyset$ nazýváme nemožným jevem, jev Ω jevem jistým. Číslo $P(A)$ pro $A \in \mathcal{Z}$ nazýváme pravděpodobností jevu A.

Definice 1: Nechť Ω je libovolná neprázdná, nejvýše spočetná množina. Nezápornou funkci $p\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ splňující podmínku

$$\sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) = 1,$$

nazýváme rozkladem pravděpodobnosti na množině Ω. Je-li $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ a $p(\omega) = \frac{1}{s}$ pro každé $\omega \in \Omega$, nazýváme funkci p klasickým rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definice 2: Nechť p je rozdělením pravděpodobnosti na nejvýše spočetné množině Ω, $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$ (potenční množina), $P\colon \mathcal{Z} \longrightarrow \mathbb{R}$, kde

$$P(A) = \begin{cases} 0, & \text{pro } A = \emptyset, \\ p(\omega), & \text{pro } A = \{\omega\}, \\ \displaystyle\sum_{\omega \in \Omega \wedge \omega \in A} p(\omega), & \text{pro } |A| \geq 2. \end{cases} \tag{1}$$

Lze dokázat, že trojice $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ je pravděpodobnostní prostor ve smyslu axiomatické definice (viz [26], str. 261), a že funkce P je pravděpodobnost na $\mathcal{Z}$. Tento prostor nazýváme diskrétním pravděpodobnostním prostorem.

Je-li p klasickým rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω, tak trojici $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ nazýváme klasickým pravděpodobnostním prostorem. Z definice 2 vyplývá, že funkce P je dána předpisem:

$$P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} \qquad \text{pro } A \subset \Omega.$$

Funkci P nazýváme klasickou pravděpodobností.

K definování diskrétního pravděpodobnostního prostoru $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ stačí určit na neprázdné nejvýše spočetné množině Ω rozdělení pravděpodobnosti p. Z tohoto důvodu lze také dvojici (Ω, p) nazvat diskrétním pravděpodobnostním prostorem. Dále tedy budeme konstruováním pravděpodobnostního prostoru rozumět konstruování takové dvojice (Ω, p), že Ω je aspoň dvouprvková, ale nejvýše spočetná množina a p je rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω. Pravděpodobností v tomto prostoru budeme rozumět funkci P definovanou na množině $\mathcal{Z} = 2^{\Omega}$ vztahem (1). Je-li funkce p je klasickým rozdělením pravděpodobnosti, pak dvojici (Ω, p) nazýváme klasickým pravděpodobnostním prostorem.

► Nechť $\Omega^* = \{a, b, c\}$, $p^*(a) = \frac{1}{3}$, $p^*(b) = 0$ a $p^*(c) = \frac{2}{3}$. Množina všech jevů v tomto prostoru je tvaru

$$\mathcal{Z}^* = \Big\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\}, \{a, c\}, \{a, b, c\}\Big\}.$$

Pravděpodobnost v tomto prostoru je funkce $P^* : \mathcal{Z}^* \longrightarrow \mathbb{R}$, určená tabulkou

$A \in \mathcal{Z}^*$	$\emptyset$	$\{a\}$	$\{b\}$	$\{c\}$	$\{a, b\}$	$\{b, c\}$	$\{a, c\}$	$\{a, b, c\}$
$P^*(A)$	0	$\frac{1}{3}$	0	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$	1	1

Trojice $(\Omega^*, \mathcal{Z}^*, P^*)$, která vznikla z dvojice (Ω^*, p^*), je pravděpodobnostní prostor ve smyslu axiomatické definice pravděpodobnosti.

► Příkladem klasických pravděpodobnostních prostorů jsou dvojice:
(Ω_M, p_M), kde $\Omega_M = \{l, r\}$ a $p_M(l) = p_M(r) = \frac{1}{2}$,
(Ω_K, p_K), kde $\Omega_K = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ a $p_K(j) = \frac{1}{6}$ pro $j \in \Omega_K$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definice 3: Pravděpodobnostní prostory (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) nazýváme izomorfními, jestliže existuje bijekce g z množiny Ω_1 na množinu Ω_2, taková, že

$$\forall \omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2: \ \omega_2 = g(\omega_1) \Rightarrow p_2(\omega_2) = p_1(\omega_1).$$

Dva klasické pravděpodobnostní prostory (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) jsou izomorfní tehdy a jen tehdy, mají-li množiny Ω_1 a Ω_2 stejný počet prvků.

Definice 4: Uvažujme dva diskrétní pravděpodobnostní prostory (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2). Nechť $\Omega_{1-2} = \Omega_1 \times \Omega_2 = \{(x, y) : x \in \Omega_1 \wedge y \in \Omega_2\}$. Definujme na množině Ω_{1-2} funkci p_{1-2} předpisem:

$$p_{1-2}(x, y) = p_1(x) \cdot p_2(y) \text{ pro každé } x \in \Omega_1 \text{ a pro každé } y \in \Omega_2.$$

(Ω_{1-2}, p_{1-2}) nazýváme kartézským součinem pravděpodobnostních prostorů (Ω_1, p_1) a (Ω_2, p_2) a značíme $(\Omega_1, p_1) \times (\Omega_2, p_2)$. Kartézský součin $(\Omega, p) \times (\Omega, p)$ nazýváme druhou kartézskou mocninou a označujeme $(\Omega, p)^2$.

Není těžké dokázat, že
— kartézský součin diskrétních pravděpodobnostních prostorů je diskrétní pravděpodobnostní prostor;
— kartézský součin klasických pravděpodobnostních prostorů je klasický pravděpodobnostní prostor.
Pojem kartézského součinu lze zobecnit na konečně (nebo spočetně) mnoho pravděpodobnostních prostorů. Kartézský součin n stejných pravděpodobnostních prostorů (Ω, p) nazýváme n-tou kartézskou mocninou prostoru (Ω, p) a označujeme $(\Omega, p)^n$. Kartézský součin spočetně mnoha pravděpodobnostních prostorů (Ω, p) označujeme $(\Omega, p)^\infty$.

Definice 5: Náhodnou veličinou v diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) nazýváme každou funkci $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$.

Definice 6: Označme Ω_X obor hodnot náhodné veličiny X v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p). Funkci $p_X : \Omega_X \longrightarrow \mathbb{R}$, kde

$$p_X(x_j) = \sum_{\omega \in \Omega \wedge X(\omega) = x_j} p(\omega) \quad \text{pro } x_j \in \Omega_X, \tag{2}$$

nazýváme rozdělením náhodné veličiny X.

Funkce p_X je rozdělením pravděpodobnosti na Ω_X a dvojice (Ω_X, p_X) je pravděpodobnostním prostor. Nazýváme ho pravděpodobnostním prostorem generovaným náhodnou veličinou X. Nechť $\{X = x_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_j\}$ pro $x_j \in \Omega_X$. Množina $\{X = x_j\}$ je jevem v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) a číslo $P(X = x_j)$ označuje pravděpodobnost tohoto jevu, tj. číslo $P(X = x_j)$ vyjadřuje pravděpodobnost s jakou náhodná veličina X nabývá hodnoty x_j.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Lze ukázat, že je-li p_X funkce definovaná vztahem (2), pak

$$p_X(x_j) = P(X = x_j).$$

Definice 7: Označme X náhodnou veličinu v diskrétním pravděpodobnostním prostoru (Ω, p). Funkci P_X definovanou na $\mathcal{B}$ (borelovských podmnožinách v $\mathbb{R}$) vztahem

$$P_X(A) = \sum_{x_j \in A} p_X(x_j) \quad \text{pro } A \in \mathcal{B}, \tag{3}$$

nazýváme pravděpodobností generovanou náhodnou veličinou X.

Lze dokázat, že trojice $(\mathbb{R}, \mathcal{B}, P_X)$ je pravděpodobnostním prostorem ve smyslu axiomatické definice pravděpodobnosti.

Je-li X náhodnou veličinou v diskrétním pravděpodobnostním prostoru, tak ze vztahu (3) plyne, že funkce P_X je jednoznačně definovaná funkcí p_X.

Definice 8: Nechť X je náhodná veličina v pravděpodobnostním prostoru (Ω, p) a Ω_X množinou všech jejích hodnot. Pokud existuje konečný součet řady

$$\sum_{x_j \in \Omega_X} x_j \cdot p_X(x_j)$$

nazveme ho střední hodnotou náhodné veličiny X a značíme $E(X)$.

2.2 Náhodný pokus a jeho stochastický model

V této práci se budeme zabývat pravděpodobnostními prostory, které vznikají jako modely diskrétních náhodných pokusů, které nazýváme čekání na série. Pojem náhodného pokusu chápeme ve smyslu definice W. Fellera. V knize [7] (viz str. 16–17) se rozlišuje

- reálný náhodný pokus – užívá objektů reálného světa (rozpad radioaktivního atomu, vznik genotypu potomka, hod konkrétní mincí, losování karty z balíčku karet, atd.)

- myšlenkový náhodný pokus – užívá objektů matematického světa (hod symetrickou mincí, losování bodu na obvodu terče ruletky, atd).

Je-li množina možných výsledků náhodného pokusu δ nejvýše spočetná, řekneme, že náhodný pokus je diskrétní. Mezi všemi diskrétními náhodnými pokusy zaměříme svoji pozornost na pokusy, které probíhají po etapách, nazýváme je víceetapovými náhodnými pokusy. K těmto víceetapovým náhodným pokusům patří i náhodné pokusy, u nichž je počet etap náhodná veličina. Takové náhodné pokusy nazýváme náhodnými pokusy o náhodném počtu etap (viz [26], str. 40 a str. 143). Příkladem takového náhodného pokusu je např. opakování hodu mincí tak dlouho, až padne rub.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

☐ Nechť δ je diskrétní náhodný pokus (myšlenkový nebo reálný). Stochastickým modelem náhodného pokusu δ nazýváme pravděpodobnostní prostor $(\Omega_\delta, p_\delta)$ takový, že Ω_δ je množinou všech možných výsledků náhodného pokusu δ a p_δ je funkce, která každému výsledku náhodného pokusu δ přiřazuje pravděpodobnost, s jakou se náhodný pokus může skončit tímto výsledkem (viz [26], str. 31).
Pravděpodobnostní prostor vzniká jako stochastický model konkrétního náhodného pokusu.

☐ V případě víceetapového náhodného pokusu δ lze vytvořit pravděpodobnostní prostor $(\Omega_\delta, p_\delta)$ jako jeho model pomocí následujících pravidel pro stochastické stromy (viz [26], str. 41):

(R1) výsledek víceetapového náhodného pokusu δ (jako prvek množiny Ω_δ) je utvořen posloupností výsledků po sobě jdoucích etap,

(R2) rozdělení pravděpodobnosti p_δ na množině Ω_δ určuje tzv. pravidlo násobení, které říká: je-li $\omega \in \Omega_\delta$, $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ a dvojice (Ω_k, p_k) je modelem k-té etapy a zároveň $a_k \in \Omega_k$ pro $k = 1, 2, \ldots, n$, pak

$$p_\delta(\omega) = p_1(a_1) \cdot p_2(a_2) \cdot \ldots \cdot p_n(a_n).$$

Pravidlo (R2) umožňuje stanovit rozdělení pravděpodobnosti p_δ na množině Ω_δ výsledků víceetapového náhodného pokusu δ, ale číslo $p_\delta(\omega)$ nelze považovat za pravděpodobnost výsledku ω (viz [26], str. 42).

Je-li δ víceetapovým náhodným pokusem, pak pravděpodobnostní prostor $(\Omega_\delta, p_\delta)$ určený pomocí pravidel pro stochastické stromy (R1) a (R2) považujeme za model tohoto pokusu.

☐ Uvažujme pravděpodobnostní prostor (Ω, p), kde $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_s\}$ a $p(\omega_j) = \frac{k_j}{m}$ pro $j = 1, 2, 3, \ldots, s$ a urnu U, ve které je m koulí. Na k_j koulích je napsáno ω_j, kde $j = 1, 2, 3, \ldots, s$. Výsledkem losování koule z urny U je nápis na vylosované kouli. Pravděpodobnostní prostor (Ω, p) je modelem takového losování a naopak. Každý konečný pravděpodobnostní prostor (Ω, p), kde p je funkce nabývající racionálních hodnot z intervalu $(0, 1)$, lze interpretovat jako model losování koule z nějaké urny. Mluvíme o urnovém modelu konečného pravděpodobnostním prostoru (Ω, p).

☐ Nechť dvojice (Ω, p), kde $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r\}$, je pravděpodobnostní prostor. Uvažujme ruletku R, jejíž terč je rozdělen na $(r+1)$ sektorů označených $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_r$. Poměr délky oblouku sektoru ω_j a obvodu terče ruletky je $p(\omega_j)$ pro $j = 0, 1, 2, \ldots, r$. Pravděpodobnostní prostor (Ω, p) je modelem losování sektoru pomocí ruletky R. Každý konečný pravděpodobnostní prostor můžeme ztotožnit s konkrétní ruletkou. Mluvíme o ruletkovém modelu konečného pravděpodobnostním prostoru (Ω, p).

Přijmeme úmluvu, že v případě pokusu o náhodném počtu etap jsou jednotlivé etapy prováděny v určitých časových jednotkách. Doba trvání pokusu δ o náhodném

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

počtu etap je (mluvíme-li o ní před začátkem pokusu δ) náhodná veličina určená v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_\delta, p_\delta)$ pravidly (`R1`) a (`R2`).

Předmětem této publikace je konstrukce a zkoumání zejména spočetných pravděpodobnostních prostorů, které jsou modely pokusů o náhodném počtu etap.

Interpretace spočetných pravděpodobnostních prostorů jako modelů náhodných pokusů o náhodném počtu etap umožňuje při jejich zkoumání používat pojmů běžného jazyka (čekání, doba čekání, získání série atd.).

Příklad 1: Stochastickým modelem hodu symetrickou mincí je dvojice (Ω_M, p_M), kde

$$\Omega_M = \{0, 1\} \qquad \text{a} \qquad p_M(0) = p_M(1) = \frac{1}{2}.$$

Číslo 0 je kódem výsledku `padne líc`, číslo 1 je kódem výsledku `padne rub`.

Příklad 2: V souladu s pravidlem (`R1`) je výsledek n-násobného hodu mincí n-členná variace množiny $\{0, 1\}$. Výsledky tohoto náhodného pokusu tvoří množinu $\Omega_{nM} = \{0, 1\}^n$. Protože padnutí rubu a líce je v každém hodu stejně pravděpodobné, jsou i všechny výsledky n-násobného hodu mincí stejně pravděpodobné. Celkem je 2^n možných výsledků a proto je pravděpodobnost každého z nich rovna $\frac{1}{2^n}$. Stochastickým modelem n-násobného hodu mincí je proto klasický pravděpodobnostní prostor (Ω_{nM}, p_{nM}), kde

$$\Omega_{nM} = \{0, 1\}^n \qquad \text{a} \qquad p_{nM}(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{pro každé } \omega \in \Omega_{nM}.$$

Uvědomte si, že když vytvoříme model n-násobného hodu mincí pomocí stochastického stromu, získáme tentýž pravděpodobnostní prostor (Ω_{nM}, p_{nM}).

Příklad 3: Opakování hodu mincí tak dlouho, až padne rub, nazýváme čekáním na rub a označujeme δ_r. Každý výsledek čekání na rub je podle pravidla (`R1`) posloupnost, jejíž poslední člen je 1 a všechny předchozí členy jsou 0. Výsledky tohoto náhodného pokusu tedy tvoří množinu $\Omega_r = \{1, 01, 001, 0001, \ldots\}$. Jestliže $\omega \in \Omega_r$, pak zápis $|\omega|$ znamená počet členů posloupnosti ω. Jestliže $\omega \in \Omega_r$ a $|\omega| = k$, pak ω je výsledkem k-násobného hodu mincí, a proto je jeho pravděpodobnost rovna $\frac{1}{2^k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k$. Stochastickým modelem čekání na rub je proto pravděpodobnostní prostor (Ω_r, p_r), kde

$$p_r(\omega) = \left(\frac{1}{2}\right)^{|\omega|} \quad \text{pro každé } \omega \in \Omega_r.$$

Určíme-li rozdělení pravděpodobnosti na množině Ω_r pomocí pravidla (`R2`) získáme funkci, která je rovna p_r. Pomocí pravidel pro stochastický strom získáme pravděpodobnostní prostor (jako model čekání δ_r), který je současně stochastickým modelem náhodného pokusu.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

2.3 Série úspěchů a neúspěchů

Předpokládejme, že množina výsledků víceetapového náhodného pokusu probíhajícího po etapách je konečná. Výsledek víceetapového náhodného pokusu je podle pravidla (R1) posloupnost výsledků po sobě jdoucích etap. Z kombinatorického hlediska jde o variaci prvků konečné množiny. Počet členů posloupnosti ω nazýváme její délkou a značíme $|\omega|$.

Definice 9: Označme ω libovolnou posloupnost $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$ a nechť $k \leq n$. Podposloupnost $(a_1, a_2, \dots, a_k)$ nazveme začátkem posloupnosti ω délky k. Podposloupnost $(a_{n-k+1}, a_{n-k+2}, \dots, a_n)$ nazýváme koncem posloupnosti ω délky k.

Definice 10: Nechť u je pevně zvolené číslo z intervalu $(0, 1)$. Dvojici $(\Omega_{0-1}, p^u_{0-1})$, kde

$$\Omega_{0-1} = \{0, 1\}, \qquad p^u_{0-1}(1) = u, \qquad p^u_{0-1}(0) = v = 1 - u,$$

nazveme nula-jedničkovým pravděpodobnostním prostorem. Náhodný pokus, jehož modelem je nula-jedničkový pravděpodobnostní prostor $(\Omega_{0-1}, p^u_{0-1})$, nazveme Bernoulliho pokusem a značíme δ^u_{0-1}. Výsledek 1 Bernoulliho pokusu nazveme úspěch, výsledek 0 nazveme neúspěch. Číslo u nazýváme pravděpodobností úspěchu.

Definice 11: Výsledek m-násobného opakování pokusu δ^u_{0-1}, tj. každou m-člennou variaci množiny $\{0, 1\}$ nazýváme sérií úspěchů a neúspěchů a označujeme α. Číslo m nazýváme délkou série α. Výsledky 0 a 1 pokusu δ^u_{0-1} jsou série délky 1.

Poznámka 1: Pro $u = \frac{1}{2}$ budeme Bernoulliho pokus $\delta^{\frac{1}{2}}_{0-1}$ interpretovat jako hod mincí a výsledky označovat písmeny l, r (líc, rub). Sérii úspěchů a neúspěchů α nazveme sérií rubů a líců α.

Zápis $\alpha \in \{0, 1\}^m$ označuje, že α je série úspěchů a neúspěchů délky m. Zápis $|\alpha| = m$ označuje, že série α má délku m. Posloupnost 10110 je série úspěchů a neúspěchů délky 5, tedy $10110 \in \{0, 1\}^5$ nebo $|10110| = 5$.

Definice 12: Nechť $\alpha_1 \in \{0, 1\}^m$, $\alpha_2 \in \{0, 1\}^n$, kde $m, n \in \mathbb{N}$. Říkáme, že série α_1 je obsažena v sérii α_2 a píšeme $\alpha_1 \subset \alpha_2$, jestliže je α_1 podposloupností (po sobě jdoucích výrazů) posloupnosti α_2. V opačném případě říkáme, že série $\alpha_1$není obsažena v sérii α_2, což zapisujeme $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$.

Např: $001010 \subset 11001010111$ ale $101 \not\subset 011110$. Samozřejmě, že $\alpha \subset \alpha$.

Definice 13: Nechť $\alpha_k \in \{0, 1\}^{m_k}$, $m_k \in \mathbb{N}$, $k = 2, \dots, n$. Jestliže $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$ a $\alpha_2 \not\subset \alpha_1$, říkáme, že série α_1 a α_2 jsou diferentní. Jsou-li každé dvě série $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ diferentní, říkáme, že série jsou po dvojicích diferentní.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definice 14: Nechť $\alpha = (a_1, a_2, \ldots, a_m) \in \{0,1\}^m$, $m \in \mathbb{N}$, $h(j) = 1 - j$ pro $j \in \{0,1\}$. Posloupnost $(h(a_1), h(a_2), \ldots, h(a_m))$ nazýváme duální sérií k sérii α a značíme $\overline{\alpha}$. Série α a $\overline{\alpha}$ nazýváme duálními sériemi.

Je-li $\alpha = 0$, pak $\overline{\alpha} = 1$. Jestliže $\alpha = 0101001$, pak $\overline{\alpha} = 1010110$. Nechť $\omega = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \{0,1\}^n$. Počet výrazů rovných 1 v posloupnosti ω, tj. součet $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$, označujeme $J(\omega)$.

2.4 Čekání na sérii úspěchů a neúspěchů

Definice 15: Nechť α je pevně zvolená série úspěchů a neúspěchů o délce m, $m \in \mathbb{N}$. Opakování pokusu δ^u_{0-1} tak dlouho, až výsledky posledních m pokusů utvoří sérii α, nazýváme čekáním na sérii α a značíme δ^u_α.

Každý výsledek náhodného pokusu δ^u_α je aspoň m-členná variace množiny $\{0,1\}$ a taková, že její konec délky m je série α a žádná jiná m-členná podposloupnost po sobě jdoucích výrazů v této posloupnosti netvoří sérii α. Označme Ω_α množinu takových variací, tj. množinu výsledků čekání δ^u_α. Funkce definovaná pravidlem (R2) na množině Ω_α je funkce p^u_α zadaná předpisem

$$p^u_\alpha(\omega) = u^{J(\omega)} v^{|\omega| - J(\omega)} \quad \text{pro } \omega \in \Omega_\alpha.$$

Dvojice $(\Omega_\alpha, p^u_\alpha)$ je pravděpodobnostní prostor. Je to model náhodného pokusu δ^u_α.

Počet opakování náhodného pokusu δ^u_α nazýváme dobou čekání na sérii α. Toto číslo (mluvíme-li o něm před začátkem pokusu) je náhodná veličina T^u_α v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_\alpha, p^u_\alpha)$ a

$$T^u_\alpha(\omega) = |\omega| \quad \text{pro } \omega \in \Omega_\alpha.$$

Náhodná veličina T^u_α nabývá hodnot $\Omega_{T^u_\alpha} = \{|\alpha|, |\alpha|+1, |\alpha|+2, \ldots\}$. Rozdělení náhodné veličiny T^u_α je funkce $p_{T^u_\alpha} \colon \Omega_{T^u_\alpha} \longrightarrow \mathbb{R}$, kde

$$p_{T^u_\alpha}(k) = P(T^u_\alpha = k) = \sum_{\omega \in \Omega \wedge T^u_\alpha(\omega) = k} p(\omega).$$

Střední hodnota náhodné veličiny T^u_α je součet řady

$$\sum_{k \in \Omega_{T^u_\alpha}} k \cdot p_{T^u_\alpha}(k).$$

Číslo $E(T^u_\alpha)$ je středním doba čekání na sérii α.

Definice 16: Jestliže pro série úspěchů a neúspěchů α_1 a α_2 platí, že

$$E(T^u_{\alpha_1}) = E(T^u_{\alpha_2}),$$

pak nazýváme série α_1 a α_2 stejně rychlými v bodě u a značíme $(\alpha_1 \Diamond \alpha_2)_u$. Pokud

$$E(T^u_{\alpha_1}) < E(T^u_{\alpha_2}),$$

pak sérii α_1 nazveme rychlejší než série α_2 v bodě u a značíme $(\alpha_1 \lhd \alpha_2)_u$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

2.5 Čekání na jednu z několika sérií úspěchů a neúspěchů

Nechť δ^u_{0-1} je náhodný pokus, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ jsou pevně zvolené po dvojicích diferentní série úspěchů a neúspěchů. Nechť $|\alpha_j| = m_j$ pro $j = 1, 2, 3, \ldots, n$. Opakování pokusu δ^u_{0-1} tak dlouho, až

– buď výsledky posledních m_1 pokusů utvoří sérii α_1,

– nebo výsledky posledních m_2 pokusů utvoří sérii α_2,

$\vdots$

– nebo výsledky posledních m_n pokusů utvoří sérii α_n,

nazýváme čekáním na jednu z n sérií úspěchů a neúspěchů a značíme $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$.

Nechť $r = \min\{m_1, m_2, \ldots, m_n\}$. Výsledek náhodného pokusu $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ je aspoň r-členná variace množiny $\{0, 1\}$ taková, že končí

– buď sérií α_1 délky m_1,

– nebo sérií α_2 délky m_2,

$\vdots$

– nebo sérií α_n délky m_n

a žádná její část po sobě jdoucích výsledků neutvoří žádnou ze sérií $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Množinu všech možných výsledků čekání $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ označujeme $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$. Je-li $p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ funkce definovaná pomocí pravidla součinu, pak

$$p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\omega) = u^{J(\omega)} \cdot v^{|\omega|-J(\omega)} \quad \text{pro } \omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}.$$

Dvojice $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$ je modelem čekání $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$.

Nechť $P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ označuje pravděpodobnost v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$. Při čekání $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ uvažujme jevy

$$A_j = \{\text{čekání } \delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n} \text{ se skončí sérií } \alpha_j\} \quad \text{pro } j = 1, 2, \ldots, n.$$

Jev A_j označíme jako $\{\ldots\alpha_j\}$ a jeho pravděpodobnost $P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_j)$. V pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$ je jev $\{\ldots\alpha_j\}$ množinou posloupností z množiny $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ končících sérií α_j o délce m_j. Z definice 2 plyne, že

$$P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_j) = \sum_{\omega\in\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}\wedge\omega\in\{\ldots\alpha_j\}} p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\omega).$$

Počet opakování náhodného pokusu $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ nazýváme dobou čekání na jednu ze sérií $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Tato doba je náhodná veličina $T^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$. Její hodnoty tvoří množinu

$$\Omega_{T^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}} = \{r, r+1, r+2, \ldots\}.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definice 17: Uvažujme čekání $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ a jeho model $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}, p^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n})$. Jestliže

$$P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_1)=P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_2),$$

pak série α_1 a α_2 nazýváme stejně dobrými při čekání $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ a značíme $(\alpha_1 \approx \alpha_2)^{\alpha_1-\cdots-\alpha_n}_u$. Jestliže série α_1 a α_2 jsou stejně dobré při čekání $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, nazýváme je stejně dobrými v bodě u a značíme $(\alpha_1 \approx \alpha_2)_u$. Jestliže

$$P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_1)>P^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}(\ldots\alpha_2),$$

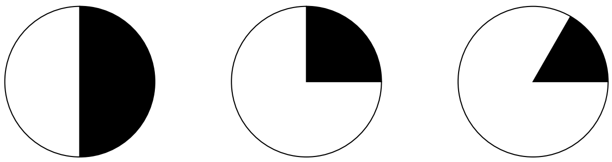
pak sérii α_1 nazýváme lepší než série α_2 při čekání $\delta^u_{\alpha_1-\ldots-\alpha_n}$ a značíme $(\alpha_1 \gg \alpha_2)^{\alpha_1-\cdots-\alpha_n}_u$. Jestliže série α_1 je lepší než sérii α_2 při čekání $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, říkáme, že série α_1 je lepší než série α_2 v bodě u a značíme $(\alpha_1 \gg \alpha_2)_u$.

2.6 Čekání na sérii barev

Náhodný pokus δ^u_{0-1} můžeme interpretovat jako losování sektoru ruletky R^u_{0-1}, jejíž terč je rozdělen na bílý a černý sektor, kde u je poměr délky oblouku černého sektoru a obvodu terče. Zastaví-li se střelka ruletky v černém sektoru (tj. je-li vylosována černá barva), mluvíme o úspěchu, je-li vylosována bílá barva, mluvíme o neúspěchu. Pomocí ruletek, jejichž terče máme na obr. 1, můžeme provádět náhodný pokus δ^u_{0-1}, přičemž

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{2} \quad \text{pro ruletku z obr. 1a)},\\ u &= \frac{1}{4} \quad \text{pro ruletku z obr. 1b)},\\ u &= \frac{1}{6} \quad \text{pro ruletku z obr. 1c)}. \end{aligned}$$

Série úspěchů a neúspěchů je v této interpretaci sérií dvou barev a tvoří tzv. černo-bílý prapor. Čekání na sérii resp. čekání na jednu u několika sérií úspěchů a neúspěchů je v takové interpretaci čekáním na prapor resp. čekáním na jeden z několika praporů.



a) b) c)

Obr. 1

Ruletkovou reprezentaci série úspěchů a neúspěchů jako dvojbarevného praporu lze rozšířit i na vícebarevné prapory. Naopak na série barev (jejichž počet je větší než 2) lze pohlížet jako na výsledky vícenásobného losování sektoru pomocí ruletky, jejíž terč má více barevných sektorů. Dostáváme tak nový náhodný pokus o náhodném počtu etap, kdy čekáme na buď na jeden nebo na jeden z několika takových praporů. Tato zobecnění budou předmětem našich dalších úvah.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Definice 18: Nechť $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Předpokládejme, že

$$p(j) = u_j > 0 \quad \text{pro } j \in \Omega \qquad \text{a} \qquad \sum_{j \in \Omega} u_j = 1.$$

Každý náhodný pokus, jehož modelem je pravděpodobnostní prostor (Ω, p), nazýváme n-pokusem a označujeme $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ nebo δ_n, pokud p je klasickým rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω. V případě, že $n = 2$ je množina výsledků 2-pokusu rovna $\{0, 1\}$ a 2-pokus je Bernoulliho pokus δ^u_{0-1}.

n-pokus $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ je jednoznačně určen stochastickým vektorem $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$, kde $u_j = p(j)$, pro $j = 1, 2, \ldots, n$. V souladu s popisem na str. 9 lze každý n-pokus interpretovat jako losování sektoru pomocí ruletky s n očíslovanými sektory takovými, že poměr úhlu sektoru j a čísla 2π je roven u_j. V této interpretaci je modelem losování sektoru pomocí takové ruletky dvojice (Ω, p), kde $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ a funkce p určuje vektor $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$.

Každý konečný pravděpodobnostní prostor budeme dále interpretovat jako stochastický model losování sektoru pomocí ruletky. Ruletku s očíslovanými sektory lze nahradit ruletkou s různobarevnými sektory. Z tohoto důvodu budeme dále mluvit o sériích barev neboli praporech.

Definice 19: Výsledek m-násobného opakování n-pokusu $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$, tj. každou m-člennou variaci množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ nazýváme sérií barev nebo n-barevným praporem nebo krátce praporem. Číslo m nazýváme délkou série barev nebo délkou praporu. Jestliže $n = 2$, pak série barev délky m je m-členná variace množiny $\{0, 1\}$, která (jako černobílý prapor) je sérií úspěchů a neúspěchů (viz definice 11). Zápis $|\alpha|$ označuje délku praporu α.

Definice 20: Nechť α je pevně zvolený prapor délky m. Opakování pokusu $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ tak dlouho až m posledních výsledků utvoří prapor α, nazýváme čekáním na prapor α a značíme $\delta_\alpha^{u_1-\ldots-u_n}$.

Počet opakování náhodného pokusu $\delta_\alpha^{u_1-\ldots-u_n}$ je náhodná veličina $T_\alpha^{u_1-\ldots-u_n}$ v modelu tohoto náhodného pokusu. Tuto náhodnou veličinu nazýváme dobou čekání na prapor α.

Definice 21: Nechť α_1 a α_2 jsou série barev a $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{|\alpha_1|}$, $\alpha_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{|\alpha_2|}$, kde $n \geq 2$. Jestliže

$$E(T_{\alpha_1}^{u_1-\ldots-u_n}) = E(T_{\alpha_2}^{u_1-\ldots-u_n}),$$

pak série α_1 a α_2 nazýváme stejně rychlé v bodě $(u_1, \ldots, u_n)$ a označujeme

$$(\alpha_1 \Diamond \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Jestliže

$$E(T_{\alpha_1}^{u_1-\ldots-u_n}) < E(T_{\alpha_2}^{u_1-\ldots-u_n}),$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

pak sérii α_1 nazýváme rychlejší než série α_2 v bodě $(u_1, \ldots, u_n)$ a označujeme

$$(\alpha_1 \lhd \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Definice 22: Nechť $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\alpha_1 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{m_1}$, $\alpha_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}^{m_2}$. Říkáme, že prapor α_1 je obsažen v praporu α_2 a zapisujeme $\alpha_1 \subset \alpha_2$, tvoří-li α_1 posloupnost po sobě jdoucích výsledků v posloupnosti α_2. Zápis $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$ znamená, že prapor α_1 není obsažen v praporu α_2. Jestliže $\alpha_1 \not\subset \alpha_2$ a $\alpha_2 \not\subset \alpha_1$, říkáme, že prapory α_1 a α_2 jsou diferentní. Jsou-li každé dva prapory z množiny praporů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ diferentní, říkáme, že je taková množina praporů po dvojicích diferentní.

V souladu s úmluvou v definici 18, v případě $n = 2$, užíváme místo množiny $\{1, 2\}$ v definicích 21–22 množinu $\{0, 1\}$.
Nechť $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ jsou pevně zvolené po dvojicích diferentní prapory. Nechť $|\alpha_j| = m_j$ pro $j \in \{1, \ldots, k\}$. Opakování n-pokusu $\delta_{u_1,\ldots,u_n}$ tak dlouho až

– buď m_1 posledních výsledků n-pokusu vytvoří prapor α_1,

– nebo m_2 posledních výsledků n-pokusu vytvoří prapor α_2,

$\vdots$

– nebo m_k posledních výsledků n-pokusu vytvoří prapor α_k,

nazýváme čekáním na jeden z k praporů a označujeme $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ nebo $\delta^{n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$, je-li $u_1 = u_2 = \cdots = u_n = \frac{1}{n}$.

Označme $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ množinu výsledků náhodného pokusu $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$, pak $\omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ tehdy a jen tehdy, když:

– $\omega \in \{1, 2, \ldots, n\}^r$, kde $r \geq \min\{m_1, m_2, \ldots, m_k\}$ a současně

– je posloupnost ω zakončena buď praporem α_1 délky m_1,

– nebo je posloupnost ω zakončena praporem α_2 délky m_2,

$\vdots$

– nebo je posloupnost ω zakončena praporem α_k délky m_k,

a žádný z předchozích po sobě jdoucích výsledků v posloupnosti ω netvoří žádný z praporů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Jestliže $\omega \in \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$, pak výraz $J_j(\omega)$ označuje počet výrazů rovných j v posloupnosti ω, kde $j = 1, 2, \ldots, n$. Jestliže rozdělení pravděpodobnosti definujeme pomocí pravidla součinu, pak je to funkce $p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k} : \Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k} \longrightarrow \mathbb{R}$, kde:

$$p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\omega) = u_1^{J_1(\omega)} \cdot u_2^{J_2(\omega)} \cdot \ldots \cdot u_n^{J_n(\omega)}. \tag{4}$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Funkce $p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ je rozdělením pravděpodobnosti na množině $\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ a dvojice $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$ je modelem náhodného pokusu $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$. Pravděpodobnost v tomto prostoru označujeme $P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$. S náhodným pokusem $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ spojme jevy:

$$A_j = \{\text{čekání } \delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k} \text{ se skončí praporem } \alpha_j, \quad j = 1, 2, \ldots, k.\}$$

Jev A_j budeme označovat $\{\ldots\alpha_j\}$ a jeho pravděpodobnost $P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots\alpha_j)$. V případě, že $n = 2$ je čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ čekáním na jednu z k sérií úspěchů a neúspěchů.

Počet opakování popsaného náhodného pokusu je náhodná veličina $T^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$. Nazýváme ji dobou čekání na jeden z praporů $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$.

Definice 23: Uvažujme čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ a jeho model, tj. pravděpodobnostní prostor $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k})$. Jestliže

$$P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots\alpha_1) = P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots\alpha_2),$$

pak prapory α_1 a α_2 nazýváme stejně dobrými při čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ a označujeme

$$(\alpha_1 \approx \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Prapory α_1 a α_2, které jsou stejně dobré při čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\alpha_2}$ nazýváme stejně dobrými v bodě $(u_1, \ldots, u_n)$ a označujeme $(\alpha_1 \approx \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}$.
Jestliže

$$P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots\alpha_1) > P^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}(\ldots\alpha_2),$$

pak prapor α_1 nazýváme lepším než prapor α_2 při čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ a označujeme

$$(\alpha_1 \gg \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Je-li prapor α_1 je lepší než prapor α_2 při čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\alpha_2}$, pak prapor α_1 nazýváme lepším než prapor α_2 v bodě $(u_1, \ldots, u_n)$ a označujeme

$$(\alpha_1 \gg \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}.$$

Symboly

$$(\alpha_1 \approx \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}, \quad (\alpha_1 \approx \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)},$$

resp.

$$(\alpha_1 \gg \alpha_2)_{(u_1,\ldots,u_n)}, \quad (\alpha_1 \gg \alpha_2)^{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}_{(u_1,\ldots,u_n)}$$

nahradíme zkráceně symboly

$$\alpha_1 \approx \alpha_2, \quad \text{resp.} \quad \alpha_1 \gg \alpha_2,$$

pokud bude zřejmé, v jakém modelu čekání série α_1 a α_2 uvažujeme. Ukažme si celou situaci na následujícím jednoduchém příkladu.

Příklad 4: Uvažme dvě série barev $\alpha_1 = 12$ a $\alpha_2 = 21$. V modelu čekání δ^3_{12-21} je $12 \approx 21$, ale v modelech čekání $\delta^3_{12-22-21}$ resp. $\delta^3_{12-11-21}$ je $12 \gg 21$ resp. $21 \gg 12$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

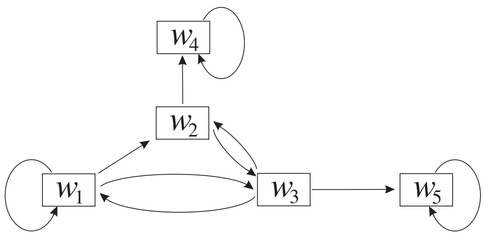
3 Stochastické grafy

3.1 Orientovaný graf

Definice 24: Orientovaným grafem nazýváme dvojici $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, kde $\mathcal{S} = \{w_1, \dots, w_s\}$ je libovolná neprázdná množina a $\mathbf{Q}_{0-1} = [q_{jk}]$ je nenulová čtvercová matice stupně s obsahující pouze čísla 0 a 1, tzv. nula-jedničková matice. Prvky množiny $\mathcal{S}$ nazýváme vrcholy grafu a matici $\mathbf{Q}_{0-1}$ nazýváme maticí sousednosti. Je-li $q_{jk} = 1$, pak dvojici (w_j, w_k), kde $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, nazýváme hranou a označujeme $w_j \to w_k$. Vrchol w_j nazýváme počátečním vrcholem a vrchol w_k nazýváme koncovým vrcholem této hrany. Je-li $q_{jj} = 1$, pak hranu $w_j \to w_j$ nazýváme smyčkou. Vrchol w_j, ze kterého nevede žádná hrana do jiného vrcholu, nazveme krajním vrcholem. Množinu všech krajních vrcholů orientovaného grafu nazýváme okrajem orientovaného grafu a označujeme $V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$. Je-li $|V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]| = r$, pak graf nazýváme orientovaným grafem s r krajními vrcholy.

Orientovaný graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ lze schématicky znázornit takto: Vrchol grafu znázorníme obdélníčkem, do kterého napíšeme název vrcholu. Jestliže $q_{jk} = 1$, kde $w_j, w_k \in \mathcal{S}$, pak hranu $w_j \to w_k$ zakreslíme jako orientovanou úsečku nebo křivku s počátkem v bodě w_j, která končí v bodě w_k. Takto dostaneme schématické znázornění grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$.

Na obr. 2 je orientovaný graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, kde $\mathcal{S} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_5\}$.



Obr. 2 Orientovaný graf

Jeho matice sousednosti je na obr. 3.

$$\mathbf{Q}_{0-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Obr. 3 Matice sousednosti orientovaného grafu

3.2 Pohyb po orientovaném grafu

Definice 25: Nechť w_j, w_k a $w_{j_1}, w_{j_2}, w_{j_3}, \dots, w_{j_m}$ jsou vrcholy orientovaného grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$. Každou posloupnost hran $(w_j \to w_{j_1}, w_{j_1} \to w_{j_2}, w_{j_2} \to w_{j_3}, \dots, w_{j_m} \to w_k)$ nazveme sledem z vrcholu w_j do vrcholu w_k a označujeme

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$w_j \to w_{j_1} \to w_{j_2} \to w_{j_3} \to \ldots \to w_{j_m} \to w_k$. Každou hranu této posloupnosti nazýváme hranou sledu. Počáteční a koncový vrchol nazýváme vrcholy sledu. Délkou sledu rozumíme počet jeho hran.

Sledem z vrcholu w_j do vrcholu w_k je tedy každá posloupnost hran, kde první hrana začíná ve vrcholu w_j, poslední hrana končí ve vrcholu w_k a počáteční vrchol každé následující hrany je vždy koncovým vrcholem hrany předchozí.

Pokud nehrozí nedorozumění, označíme sled $w_j \to w_{j_1} \to w_{j_2} \to w_{j_3} \to \ldots \to w_{j_m} \to w_k$, zkráceně $w_j \rightsquigarrow w_k$ a jeho délku označíme $|w_j \rightsquigarrow w_k|$. Množinu všech sledů z vrcholu w_j do vrcholu w_k označujeme $\{w_j \rightsquigarrow w_k\}$. Existuje-li sled z vrcholu w_j do vrcholu w_k, říkáme, že vrchol w_k je dosažitelný z vrcholu w_j.

3.3 Vlastní orientovaný graf

Definice 26: Vlastním orientovaným grafem nazýváme orientovaný graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ splňující následující podmínky:

(p1) $\forall w_{k_1}, w_{k_2} \in \mathcal{S} \quad [(\forall w_j \in \mathcal{S} \; q_{jk_1} = q_{jk_2} = 0) \Longrightarrow w_{k_1} = w_{k_2}]$,

(nejvýše jeden vrchol není koncovým vrcholem žádné hrany)

(p2) $\forall w_{j_1} \in \mathcal{S} \; \exists w_{j_2} \in \mathcal{S} \; w_{j_1} \neq w_{j_2} \, (q_{j_1 j_2} = 1 \vee q_{j_2 j_1} = 1)$,

(každý vrchol je počátečním nebo koncovým vrcholem aspoň jedné hrany)

(p3) $\exists w_j \in S \quad \forall w_k \in \mathcal{S} \quad [w_j \neq w_k \Rightarrow \; (\exists w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_m} \in \mathcal{S}$

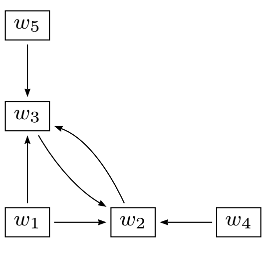
$$(q_{jj_1} \cdot q_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_m k} = 1))],$$

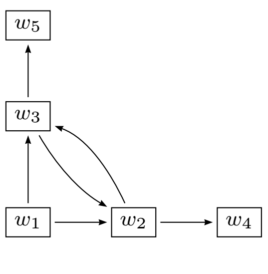
(aspoň z jednoho vrcholu lze přejít do každého jiného vrcholu grafu)

(p4) $\forall w_j \in \mathcal{S} \quad \exists w_k \in \mathcal{S} \; \exists w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_n} \in \mathcal{S} \quad [q_{jj_1} \cdot q_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_n k} = 1]$.

(z každého vrcholu grafu lze přejít do nějakého krajního vrcholu)

Graf na obr. 3*a*) nesplňuje podmínku (p1), na obr. 3*b*) je orientovaný graf, který splňuje podmínku (p1).

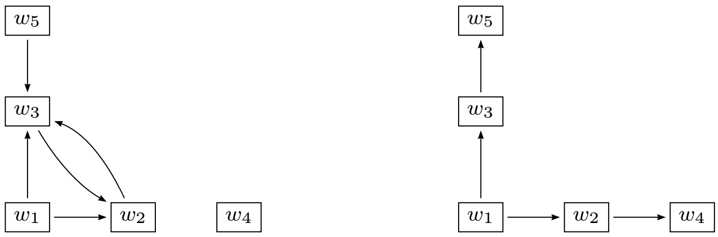




Obr. 4

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

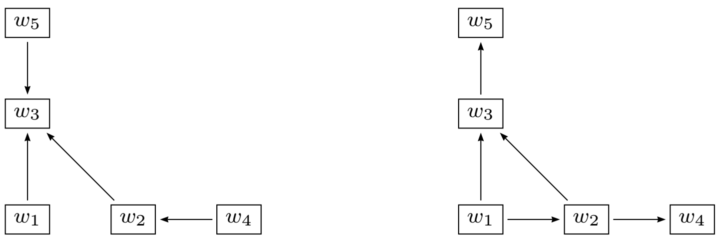
Obrázek 5a) představuje orientovaný graf, který nesplňuje podmínku (p2), na obr. 5b) je orientovaný graf, který splňuje podmínku (p2).



a) b)

Obr. 5

Graf z obr. 6a) nesplňuje podmínku (p3), neboť neexistuje vrchol, ze které lze přejít do všech ostatních vrcholů. Graf na obrázku 6b) splňuje podmínku (p3) (zmiňovaným vrcholem je vrchol w_1).

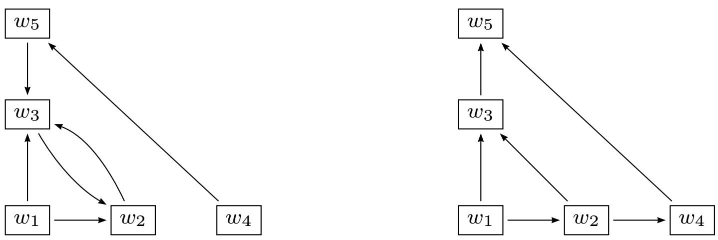


a) b)

Obr. 6

Orientovaný graf, který nesplňuje podmínku (p4) je na obr. 7a). Žádný z vrcholů tohoto grafu není krajním vrcholem. Na obr. 7b) je graf splňující podmínku (p4).

Vlastní orientované grafy jsou na obr. ??, 3b), 5b), 6b) a 7b).



a) b)

Obr. 7

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

3.4 Startovní vrchol

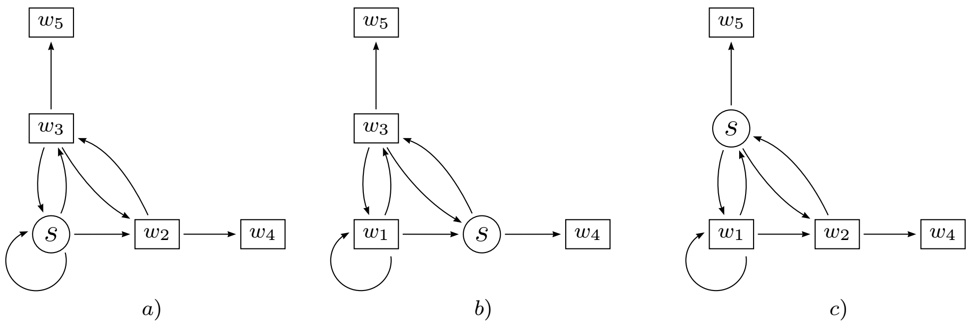
Definice 27: Řekneme, že vrchol w_k orientovaného grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ je vrchol splňující počáteční podmínku jestliže:

(p5) $\forall w_j \in \mathcal{S}, w_j \neq w_k \; \exists w_{j_1}, w_{j_2}, \ldots, w_{j_m} \in \mathcal{S} \; [q_{kj_1} \cdot q_{j_1 j_2} \cdot \ldots \cdot q_{j_m j} = 1]$,

(z vrcholu w_k lze přejít do každého jiného vrcholu grafu).

Startovním vrcholem nazýváme právě jeden z vrcholů splňujících počáteční podmínku. Z kontextu bude vždy zřejmé, že právě v tomto vrcholu graf „začíná". Startovní vrchol označujeme w_0 a na schématické znázornění symbolem $\mathcal{S}$.

Existence aspoň jednoho startovního vrcholu ve vlastním orientovaném grafu zaručuje podmínka (p3). Graf z obr. ?? má tři vrcholy splňující počáteční podmínku. Jsou to vrcholy w_1, w_2 a w_3. V závislosti na kontextu můžeme položit $w_0 = w_1$ nebo $w_0 = w_2$ nebo $w_0 = w_3$. Získáme tak následující tři orientované grafy - obr. 8*a*), 8*b*) a 8*c*).



Obr. 8

Je zřejmé, že startovní vrchol nemůže být krajním vrcholem.

Definice 28: Orientovaný graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, na kterém existuje startovní vrchol w_0 splňující podmínku

(p6) $\forall w_j \in \mathcal{S} \quad [w_j \neq w_0 \Rightarrow q_{j0} = 0]$,

nazýváme orientovaným grafem bez návratu na start.

Obrázek 3*b*) představuje graf bez návratu na start (startovním vrcholem je vrchol w_1).

Definice 29: Orientovaný graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$, na kterém existuje startovní vrchol w_0 splňující podmínku

(p7) $\exists w_j \in \mathcal{S} \quad [w_j \neq w_0 \wedge q_{j0} = 1]$,

nazýváme orientovaným grafem s návratem na start.

Na orientovaném grafu s návratem na start je startovní vrchol w_0 koncovým vrcholem alespoň jedné hrany (smyčky neuvažujeme). Obrázky 8*a*), 8*b*) a 8*c*) představují orientované grafy s návratem na start.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

3.5 Cykl

Definice 30: Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ je vlastní orientovaný graf a $w_j \in \mathcal{S}$. Každý sled z vrcholu w_j do vrcholu w_j, ve kterém se žádná z hran neopakuje nazýváme cyklem. Každý sled z vrcholu w_j do vrcholu w_j nazýváme smíšeným cyklem a označujeme c. Každou hranu tohoto sledu nazýváme hranou cyklu. Délku sledu nazýváme délkou smíšeného cyklu a označujeme $|c|$. Každý vrchol smíšeného cyklu včetně počátečního a koncového vrcholu nazýváme vnitřním vrcholem smíšeného cyklu.

Uvědomte si, že každý obyčejný cyklus je cyklem smíšeným a smyčka je obyčejným cyklem délky 1.

Definice 31: Cyklus, jehož jedním z vnitřních vrcholů je startovní vrchol, nazýváme základním cyklem. Cyklus, který není základním cyklem nazýváme vnitřním cyklem. Smyčka, která není základním cyklem se nazývá vnitřní smyčkou. Smíšený cyklus, jehož jedním z vnitřních vrcholů je startovní vrchol nazýváme základním smíšeným cyklem.

Množinu všech sledů grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ ze startovního vrcholu w_0 do krajního vrcholu w_j označujeme $B_{w_j}[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ nebo krátce B_{w_j}. Množinu všech sledů grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ ze startovního vrcholu w_0 do nějakého krajního vrcholu označujeme $B[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$. Budeme-li potřebovat zdůraznit, že sled $w_0 \rightsquigarrow w_j$ vede přes konkrétní vrchol, použijeme zápis $w_0 \rightsquigarrow w_k \rightsquigarrow w_j$, kde $w_0 \rightsquigarrow w_k$ je sled ze startovního vrcholu do vrcholu w_k, $w_k \rightsquigarrow w_j$ je sled z vrcholu w_k do krajního vrcholu w_j a w_k zmiňovaný konkrétní vrchol sledu. Analogicky pro vyznačení konkrétní hrany sledu $w_0 \rightsquigarrow w_j$, užijeme zápis $w_0 \rightsquigarrow w_{k_1} \to w_{k_2} \rightsquigarrow w_j$, kde $w_{k_1} \to w_{k_2}$ je zmiňovaná konkrétní hrana sledu nebo $w_0 \rightsquigarrow w_{k_1} \to \ldots \to w_{k_n} \rightsquigarrow w_j$, kde $w_{k_1} \to \ldots \to w_{k_n}$ je nějaký konkrétní úsek sledu.

Definice 32: Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ je vlastní orientovaný graf, t libovolný sled, c libovolný (smíšený) cyklus. Pokud nějaká podposloupnost po sobě jdoucích hran sledu t tvoří (smíšený) cyklus c, říkáme, že sled t obsahuje (smíšený) cyklus c. V opačném případě říkáme, že (smíšený) cyklus c není obsažen ve sledu t.

3.6 Druhy tras orientovaného grafu

Definice 33: Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}_{0-1}]$ je vlastní orientovaný graf. Sled, se který neobsahuje žádný cyklus, nazýváme cestou. Sled, se který obsahuje základní cykly a současně neobsahuje vnitřní cykly nazýváme prostý sled. Sled, se který obsahuje vnitřní smyčky a současně neobsahuje základní cykly nebo jiné vnitřní cykly, nazýváme poloprostý sled. Sled, se který obsahuje vnitřní cykly a současně neobsahuje základní cykly, nazýváme polosložený sled. Sled, se který obsahuje současně vnitřní cykly a základní cykly, nazýváme složený sled.

Uvědomte si, že každý poloprostý sled je také polosloženým sledem.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

3.7 Stochastický graf

Definice 34: Vektor $\vec{v} = [p_1, p_2, \dots, p_s]$, kde $p_i \geq 0, i = 1, 2, \dots, s$ a $\sum_{i=1}^{s} p_i = 1$ nazveme s-složkovým stochastickým vektorem.
Čtvercovou matici $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$, kde $j, k = 0, 1, 2, \dots, s-1$ nazýváme stochastickou maticí stupně s, jestliže

$$p_{jk} \in \langle 0, 1 \rangle, \quad \forall j, k \in \{0, 1, 2, \dots, s-1\}$$

a

$$\sum_{k=0}^{s-1} p_{jk} = 1, \quad \forall j \in \{0, 1, 2, \dots, s-1\}.$$

Stochastickou maticí je tedy každá čtvercová matice s nezápornými členy ve které je součet čísel v každém řádku roven 1. Stochastickými maticemi jsou například následující matice:

$$\mathbf{Q_1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{Q_2} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{4} & 0 & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nechť $\mathbf{Q}$ je stochastickou maticí stupně s. Uvažujme zobrazení f z množiny všech stochastický matic do množiny nenulových nula-jedničkových matic, které stochastické matici $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$ přiřazuje nula-jedničkovou matici $f(\mathbf{Q}) = \mathbf{Q}_{0-1} = [q_{jk}]$, kde

$$q_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{pro} \quad p_{jk} > 0, \\ 0, & \text{pro} \quad p_{jk} = 0. \end{cases}$$

Matice $f(\mathbf{Q})$ vznikne z matice $\mathbf{Q}$ nahrazením každého jejího nenulového prvku číslem 1.

Definice 35: Nechť $\mathcal{S}$ je s-prvková množina a $\mathbf{Q}$ stochastická matice stupně s. Jestliže dvojice $[\mathcal{S}, f(\mathbf{Q})]$ je vlastním orientovaný graf, pak dvojici $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ nazýváme stochastickým grafem.

Pro výše uvedené stochastické matice $\mathbf{Q_1}$ a $\mathbf{Q_2}$ platí:

$$f(\mathbf{Q_1}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad f(\mathbf{Q_2}) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Nechť $\mathcal{S}_1 = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ a $\mathcal{S}_2 = \{a_0, a_1, a_2, a_3, a_4\}$. Dvojice $[\mathcal{S}_1, f(\mathbf{Q_1})]$ není vlastním orientovaným grafem a dvojice $[\mathcal{S}_1, \mathbf{Q_1}]$ není ani stochastickým grafem. Dvojice

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$[\mathcal{S}_2, f(\mathbf{Q_2})]$ je vlastním orientovaným grafem, proto je dvojice $[\mathcal{S}_2, \mathbf{Q_2}]$ stochastickým grafem.

Pojmy běžně užívané pro vlastní orientované grafy užíváme také pro stochastické grafy.
Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ je stochastický graf a $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, \dots, w_{s-1}\}$. Uvažujme s-složkový stochastický vektor $\vec{v} = [1, 0, \dots, 0]$. Trojice $[\mathcal{S}, \vec{v}, \mathbf{Q}]$ představuje další možný algebraický zápis stochastického grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Po přidání vektoru $\vec{v}$ k dvojici $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ vidíme, že tento algebraický zápis stochastického grafu lze nahlížet jako na algebraický zápis odpovídajícího homogenního Markovského řetězce (viz str. 26). Vzhledem k tomu, že budeme nadále používat stochastických grafů zejména ke studiu vlastností homogenních Markovských řetězců, přijmeme úmluvu, že pokud w_j je krajním vrcholem, pak smyčku $w_j \to w_j$ nekreslíme. Homogenními Markovskými řetězce se budeme zabývat v další části práce.

3.8 Ohodnocení hrany, ohodnocení sledu na stochastickém grafu

Definice 36: Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ je stochastický graf, kde $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$, nechť $w_j, w_k \in \mathcal{S}$. Jestliže $\mathbf{Q}(w_j, w_k) = p_{jk} > 0$, nazveme číslo p_{jk} ohodnocením hrany $w_j \to w_k$. Je-li z sledem v grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, pak součin ohodnocení všech hran tvořící sled nazýváme ohodnocením sledu z a značíme $w(z)$. Je-li B libovolnou množinou sledů na stochastickém grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, tak číslo

$$w(B) = \sum_{t \in B} w(t)$$

nazýváme ohodnocením množiny B.

Nechť $w_j \in \mathcal{S} \setminus V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Pro každý stochastický graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ je součet všech ohodnocení sledu z vrcholu w_j do krajního vrcholu je roven 1.

3.9 Znázornění stochastického grafu

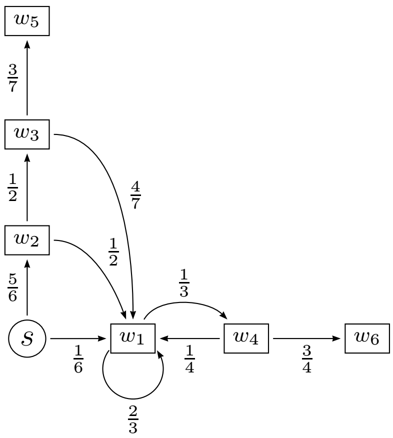
Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ je stochastický graf, kde $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, \dots, w_{s-1}\}$ a nechť $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$. Uvažujme schématické znázornění orientovaného grafu $[\mathcal{S}, f(\mathbf{Q})]$ a přiřaďme každé hraně $w_j \to w_k$ grafu ohodnocení p_{jk}. Graf s takto přiřazenými kladnými čísly je schématickým znázorněním stochastického grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Například dvojice $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, kde $\mathcal{S} = \{w_0, w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6\}$ a

$$\mathbf{Q} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{6} & \frac{5}{6} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{7} & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{7} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

je stochastický graf. Jeho schématické znázornění je na obr. 9.



Obr. 9 Schématické znázornění stochastického grafu

V teorii grafů se pracuje s orientovanými grafy, v nichž je každé hraně přiřazeno ohodnocení (ne nutně kladné). Takové grafy označujeme jako ohodnocené orientované grafy (viz [21], str. 143). Z tohoto pohledu je tedy výše uvedený stochastický graf ohodnoceným orientovaným grafem.

3.10 Izomorfismus stochastických grafů

Definice 37: Říkáme, že stochastické grafy $[\mathcal{S}_1, \mathbf{Q_1}]$ a $[\mathcal{S}_2, \mathbf{Q_2}]$ jsou izomorfní, pokud existuje taková bijekce $g\colon \mathcal{S}_1 \longrightarrow \mathcal{S}_2$, že pro všechny vrcholy $w_{j_1}, w_{j_2} \in \mathcal{S}_1$ a všechny vrcholy $w_{k_1}, w_{k_2} \in \mathcal{S}_2$ splňující podmínku

$$\Big(g(w_{j_1}) = w_{k_1} \wedge g(w_{j_2}) = w_{k_2}\Big)$$

platí:

$$\mathbf{Q_1}(w_{j_1}, w_{j_2}) = \mathbf{Q_2}(w_{k_1}, w_{k_2}).$$

Říkáme, že funkce g zachovává ohodnocení hran.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

4 Markovské řetězce

4.1 Homogenní Markovský řetězec

Definice 38: Posloupnost náhodných veličin $(X_n)_{n=0}^{\infty}$ definovaných v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega, \mathcal{Z}, P)$ nazýváme Markovským řetězcem, jestliže pro každé $n \in \mathbb{N}$ a každou posloupnost $x_{k_0}, x_{k_1}, \dots, x_{k_{n-1}}, x_k, x_j \in \mathcal{S}$ platí

$$\begin{aligned} &P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) \\ &\quad = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k), \end{aligned} \tag{5}$$

pro $P(X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) > 0$. Jestliže navíc pravá strana rovnosti (5) nezáleží na n, nazývá se Markovský řetězec homogenním. Čísla z množiny $\mathcal{S}$ nazýváme stavy.

Poznámka 2: V našem případě užijeme definici z [24], str. 322, která představuje Markovský řetězec jako posloupnost náhodných pokusů a jim odpovídající posloupnost pravděpodobnostních prostorů, což umožňuje využít některé další metody k vyšetřování vlastností Markovských řetězců.

Dále se budeme zabývat pouze homogenními Markovskými řetězci s konečně mnoha stavy a známým (počátečním) rozdělením náhodné veličiny X_0.

Definice 39: Nechť $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \omega_2, \dots, \omega_r\}$, $\Omega_B \subsetneq \Omega_{\mathcal{S}}$. Předpokládejme, že každému prvku ω_j z množiny $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpovídá náhodný pokus δ_j s modelem $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$ a δ_* je náhodný pokus modelu $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_*)$. Markovským řetězcem o $(r+1)$ stavech (jsou to prvky množiny $\Omega_{\mathcal{S}}$) nazýváme následující víceetapový náhodný pokus δ:

- nejdříve (to je počáteční etapa) provádíme náhodný pokus δ_*,
- pokud kterákoli etapa skončí výsledkem z množiny Ω_B, tak náhodný pokus δ končí,
- pokud daná etapa skončí výsledkem ω_j, $\omega_j \notin \Omega_B$, pak v další etapě provádíme náhodný pokus δ_j.

Prvky množiny $\Omega_{\mathcal{S}}$ nazýváme stavy a prvky množiny Ω_B absorpčními (pohlcujícími) stavy.

Markovský řetězec je náhodným losováním o náhodném počtu etap, přičemž výsledky každé etapy jsou prvky množiny $\Omega_{\mathcal{S}}$ a model každé etapy (kromě první) záleží pouze na výsledku etapy předchozí (viz [7], str. 316–317).

V teorii Markovských řetězců se obvykle předpokládá, že etapy náhodného pokusu probíhají v určitých časových jednotkách. Konec n-té etapy $(n \in \mathbb{N}_0)$ nazýváme čas n. Jestliže n-tá etapa skončí výsledkem ω_j říkáme, že v čase n se systém Σ nachází ve stavu ω_j.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

4.2 Algebraická reprezentace

Algebraickou reprezentací pravděpodobnostního prostoru (Ω, p), kde $\Omega = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r\}$, je stochastický vektor $[p(\omega_0), p(\omega_1), \ldots, p(\omega_r)]$.

Uvažujme Markovský řetězec o $(r+1)$ stavech ve smyslu definice 39. Algebraickou reprezentací modelu náhodného pokusu δ_* je vektor

$$p_* = [p_*(\omega_0), p_*(\omega_1), \ldots, p_*(\omega_r)].$$

Vzhledem k tomu, že δ_* je počáteční etapa, nazýváme tento vektor počátečním vektorem.

Jestliže se systém Σ v čase n nachází ve stavu ω_j a $\omega_j \notin \Omega_B$, tak následující etapa Markovského řetězce je náhodným pokusem δ_j s modelem $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$, kde

$$p_j = [p_{j0}, p_{j1}, \ldots, p_{jr}], \qquad p_{jk} = p_j(\omega_k) \text{ pro } \omega_k \in \Omega_{\mathcal{S}}.$$

Jestliže $\omega_j \in \Omega_B$, pak podle výše uvedené úmluvy plyne, že

$$p_{jk} = \begin{cases} 1, & \text{pro } j = k, \\ 0, & \text{pro } j \neq k. \end{cases}$$

Tedy pro $\omega_j \in \Omega_B$ je složka p_{jj} vektoru p_j rovna 1 a ostatní složky jsou rovny 0. Posloupnost vektorů $(p_0, \ldots, p_r)$ tvoří stochastickou maticí $\mathbf{Q} = [p_{jk}]$, jejíž j-tý řádek je tvořen vektorem p_j. Trojice $[\Omega_{\mathcal{S}}, p_*, \mathbf{Q}]$ je algebraická reprezentace Markovského řetězce.

V této publikaci se budeme zabývat Markovskými řetězci $[\Omega_{\mathcal{S}}, p_*, \mathbf{Q}]$, ve kterých $p_* = [1, 0, \ldots, 0]$, a jejichž první etapou je náhodný pokus δ_0. V takovém případě je trojice $[\Omega_{\mathcal{S}}, p_*, \mathbf{Q}]$ jednoznačně určena dvojicí $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$. Stav ω_0 nazýváme počátečním stavem.

4.3 Ruletková reprezentace homogenního Markovského rětězce

Uvažujme Markovský řetězec $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$. Každému prvku ω_j z množiny $\Omega_{\mathcal{S}} \setminus \Omega_B$ odpovídá náhodný pokus δ_j s pravděpodobnostním modelem $(\Omega_{\mathcal{S}}, p_j)$. Vraťme se k ruletkovému modelu konečného pravděpodobnostním prostoru (viz str. 9). Každý náhodný pokus δ_j má svoji ruletkovou reprezentaci. Předpokládejme, že náhodnému pokusu δ_j odpovídá ruletka R_j. Čísla sektorů každé z ruletek jsou prvky množiny stavů $\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_r\}$. Uvažme následující víceetapový náhodný pokus:

– náhodný pokus začíná losováním sektoru pomocí ruletky R_0,

– pokud se nějaká etapa skončí výsledkem ω_j, kde $\omega_j \in \Omega_B$, náhodný pokus končí,

– pokud se etapa skončí výsledkem ω_j, $\omega_j \notin \Omega_B$, pak následující losování se provádí ruletkou R_j.

Tento náhodný pokus nazveme ruletkový model Markovského řetězce $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

4.4 Graf Markovského řetězce

Pro Markovský řetězec $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ lze prvky množiny Ω_S interpretovat jako vrcholy grafu. Vrchol odpovídající stavu ω_j označíme w_j, tedy $\mathcal{S} = \{w_0, \ldots, w_r\}$ je množinou všech vrcholů grafu. Vrchol w_0 představuje počáteční stav ω_0 nazýváme ho startovním vrcholem. Každý vrchol reprezentující absorpční stav je koncovým vrcholem, množinu všech koncových vrcholů nazýváme okrajem grafu. Jestliže $p_{jk} > 0$, pak vrchol w_j spojíme hranou s vrcholem w_k. Připíšeme-li každé hraně číslo p_{jk} dostaneme ohodnocený orientovaný graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, který nazýváme grafem Markovského řetězce $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$. V pravděpodobnostní literatuře se nazývá engelovským grafem.

Každý Markovský řetězec s konečnou množinou $\Omega_{\mathcal{S}}$ stavů má svůj engelovský graf a každý engelovský graf odpovídá nějakému Markovskému řetězci.

4.5 Interpretace homogenního Markovského řetězce jako bloudění po stochastickém grafu

Nechť $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ je Markovský řetězec s $(r+1)$ stavy a dvojice $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ jeho engelovský graf. V [6] Arthur Engel interpretoval průběh Markovského řetězce jako posloupnost náhodných pokusů následovně:
Na začátku (před provedením počáteční etapy) stojí figurka ve startovním vrcholu w_0 grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Jestliže první etapa skončí výsledkem w_j, přesune se figurka do vrcholu w_j. Pokud se po $(n-1)$-ní etapě nachází figurka ve vrcholu w_j a n-tá etapa se skončí výsledkem w_k, tak figurku přesuneme z vrcholu w_j do vrcholu w_k. Bloudění figurky končí jejím přechodem do nějakého krajního vrcholu grafu. Při této„engelovské" interpretaci Markovského řetězce $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ se systém Σ nachází v čase n ve stavu ω_j tehdy a jen tehdy, když se figurka po n-té etapě nachází ve vrcholu w_j. Doba trvání Markovského řetězce $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ (odměřujeme počtem etap) je dobou náhodného bloudění po grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$.

4.6 Čekání na jeden z k praporů jako homogenní Markovský řetězec

Příklad 5: Uvažujme čekání $\delta_{01-11}^{\frac{1}{3}}$. Tedy

$$\Omega_{\mathcal{S}} = \{\omega_0, 0, 1, 01, 11\} \qquad \text{a} \qquad \Omega_B = \{01, 11\}.$$

Označme $\omega_1 = 0$, $\omega_2 = 1$, $\omega_3 = 01$ a $\omega_4 = 11$. Stavům ω_0, ω_1, ω_2 odpovídají náhodné pokusy δ_0, δ_1 a δ_2. Modelům náhodných pokusů δ_0, δ_1 a δ_2 odpovídají vektory:

$$p_0 = [0, \tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{3}, 0, 0], \qquad p_1 = [0, \tfrac{2}{3}, 0, \tfrac{1}{3}, 0] \qquad \text{a} \qquad p_2 = [0, \tfrac{2}{3}, 0, 0, \tfrac{1}{3}].$$

Průběh čekání $\delta_{01-11}^{\frac{1}{3}}$ interpretujeme následovně:

– nejdříve se provádí náhodný pokus δ_0,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

– jestliže se kterákoli z etap skončí výsledkem z množiny Ω_B, pak náhodný pokus $\delta^{\frac{1}{3}}_{01-11}$ končí,

– jestliže se daná etapa skončí výsledkem ω_j, kde $j = 0, 1, 2$, provádí se v další etapě náhodný pokus δ_j.

Čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$ na jeden z k praporů je ve smyslu definice 39 Markovským řetězcem. Stavy čekání jsou všechny prapory, počátky všech praporů a také počáteční stav ω_0. Absorpčními stavy jsou v tomto případě série $\alpha_1, \dots, \alpha_k$.

Nechť $\Omega_{\mathcal{S}}$ označuje množinu všech stavů čekání. Nechť p_{jk} je pravděpodobnost s jakou čekání ze stavu ω_j přejde po daném pokusu do stavu ω_k. Uvažujme funkci $\mathbf{Q}$ takovou, že $\mathbf{Q}(\omega_j, \omega_k) = p_{jk}$ pro $\omega_j, \omega_k \in \Omega_{\mathcal{S}}$. Dvojice $[\Omega_{\mathcal{S}}, \mathbf{Q}]$ je algebraický model čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$, dvojice $[\mathcal{S}, f(\mathbf{Q})]$ splňuje podmínky (p1)-(p4) z definice 26 (viz str. 19 a str. 23) a navíc Engelův graf $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ tohoto čekání je stochastickým grafem, který nazýváme grafem čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$.

Jestliže $\Omega_{\mathcal{S}} \subset \mathbb{R}$ (tj. stavy jsou čísla), pak je uvedený Markovský řetězec jako posloupnost náhodných pokusů zvláštní posloupností náhodných veličin splňujících podmínku (5) a navíc je Markovským řetězcem ve smyslu definice 38, neboť v pravděpodobnostním prostoru určeném pravidlem součinu platí:

$$
\begin{aligned}
&P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k, X_{n-1} = x_{k_{n-1}}, \dots, X_1 = x_{k_1}, X_0 = x_{k_0}) \\
&\quad = \frac{p_{kj} \cdot p_{k_{(n-1)}k} \cdot p_{k_{(n-2)}k_{(n-1)}} \cdots p_{k_0 k_1}}{p_{k_{(n-1)}k} \cdot p_{k_{(n-2)}k_{(n-1)}} \cdots p_{k_0 k_1}} = p_{kj} = P(X_{n+1} = x_j | X_n = x_k).
\end{aligned}
$$

4.7 Pravděpodobnostní prostor jako model čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$

Definice 40: Nechť Ω_G je množina všech sledů na stochastickém grafu $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ a p_G funkce, která každému sledu přiřazuje jeho ohodnocení. Funkce p_G je rozdělením pravděpodobnosti na množině Ω_G. Dvojici (Ω_G, p_G) nazýváme pravděpodobnostní prostor indukovaný grafem.

Čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$ je homogenním Markovským řetězcem a jeho průběh můžeme interpretovat jako náhodné bloudění po stochastickém grafu tohoto čekání. Vzhledem k této engelovské interpretaci, lze výsledek čekání ztotožnit se sledem na stochastickém grafu tohoto čekání.

Vzhledem k tomu, že každému stavu čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$ odpovídá právě jeden vrchol grafu čekání, musí také každému výsledku čekání $\delta^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}$ odpovídat právě jeden sled na grafu čekání, tj. existuje bijekce z množiny stavů čekání na množinu vrcholů grafu čekání a také bijekce z množiny výsledků čekání na množinu sledů grafu čekání.

Pravděpodobnostní prostor $(\Omega_{\alpha_1-\dots-\alpha_k}, p^{u_1-\dots-u_n}_{\alpha_1-\dots-\alpha_k})$ a pravděpodobnostní prostor (Ω_G, p_G)

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

indukovaný stochastickým grafem čekání $\delta^{u_1-\ldots-u_n}_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}$ jsou izomorfní (ve smyslu definice 3).

Další úvahy a výpočty probíhají v zejména pravděpodobnostním prostoru (Ω_G, p_G). V tomto pravděpodobnostním prostoru je jev $\{\ldots\alpha_j\}$ množinou těch sledů na grafu čekání, které vedou do vrcholu α_j. Tedy

$$P(\ldots\alpha_j) = \sum_{t\in\{\ldots\alpha_j\}} w(t). \tag{6}$$

Existuje řada způsobů, jak vypočítat pravděpodobnost jevu $\{\ldots\alpha_j\}$, např.: absorpční algoritmus, engelovské redukce grafů, Masonovo pravidlo, Conwayův vzorec, atd. V této knize ukážeme i jiné metody jak vypočítat $P(\ldots\alpha_j)$ pomocí vlastností stochastických grafů.

5 Metody zkoumání modelů Markovských řetězců

5.1 Absorpční algoritmus

Nechť $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ je stochastický graf, $V_1 \subset V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$. Symbol $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ označuje ohodnocení množiny všech sledů z vrcholu w_j do množiny V_1 (nějaká množina krajních vrcholů). Interpretujeme-li průběh Markovského řetězce jako bloudění po stochastické grafu tohoto řetězce, vidíme, že $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ je pravděpodobnost, že se figurka z vrcholu w_j dostane do jednoho z krajních vrcholů množiny V_1. Soubor podmínek

1) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = 1 \quad$ pro $w_j \in V_1$,

2) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = 0 \quad$ pro $w_j \in V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}] \setminus V_1$,

3) $p_{j\rightsquigarrow V_1} = \sum_{w_k} p_{jk} \cdot p_{k\rightsquigarrow V_1} \quad$ pro $w_j \notin V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$, kde sčítáme přes všechny vrcholy w_k, pro které $p_{jk} > 0$,

nazýváme absorpčním algoritmem (viz [23], str. 398–399). Tento algoritmus počítá pravděpodobnost $p_{j\rightsquigarrow V_1}$ pomocí soustavy lineárních rovnic.

Nechť $P(\ldots w_{j_0})$ označuje pravděpodobnost přechodu do krajního vrcholu w_{j_0} a předpokládejme, že $V_1 = \{w_{j_0}\}$. Z absorpčního algoritmu získáme soustavu rovnic a jejím vyřešením dostaneme hodnotu pravděpodobnosti $p_{0\rightsquigarrow\{w_{j_0}\}} = P(\ldots w_{j_0})$, která je součtem ohodnocení všech sledů končících v krajním vrcholu w_{j_0}.

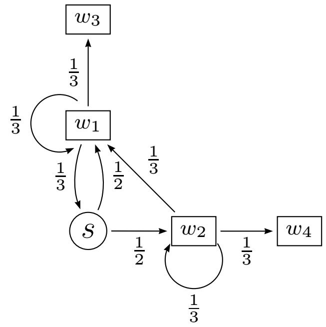
Příklad 6: Uvažujme stochastický graf z obr. 10. Předpokládejme, že $V_1 = \{w_3\}$, pak

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

z absorpčního algoritmu dostaneme následující soustavu rovnic

$$\begin{aligned}
p_{0\rightsquigarrow\{w_3\}} &= \tfrac{1}{2}\cdot p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} + \tfrac{1}{2}\cdot p_{2\rightsquigarrow\{w_3\}},\\
p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} &= \tfrac{1}{3}\cdot p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} + \tfrac{1}{3}\cdot p_{0\rightsquigarrow\{w_3\}} + \tfrac{1}{3}\cdot p_{3\rightsquigarrow\{w_3\}},\\
p_{2\rightsquigarrow\{w_3\}} &= \tfrac{1}{3}\cdot p_{1\rightsquigarrow\{w_3\}} + \tfrac{1}{3}\cdot p_{2\rightsquigarrow\{w_3\}} + \tfrac{1}{3}\cdot p_{4\rightsquigarrow\{w_3\}},\\
p_{3\rightsquigarrow\{w_3\}} &= 1,\\
p_{4\rightsquigarrow\{w_3\}} &= 0,
\end{aligned}$$

z které plyne, že $p_{0\rightsquigarrow\{w_3\}} = P(\dots w_3) = \dfrac{3}{5}$.



Obr. 10

5.2 Conwayův vzorec

Nechť $\delta_{\alpha-\beta}$ je čekáním na jednu ze dvou sérií rubů a líců, j resp. k jsou délky sérií α resp. β. Nechť $\alpha^{(m)}$, $\beta^{(m)}$ označuje začátky sérií α, β délky m a $\alpha_{(m)}$, $\beta_{(m)}$ konce sérií α, β délky m. Definujme množiny

$$\begin{aligned}
A_\alpha &= \Big\{m \in \{1,2,3,\dots,j\} : \alpha_{(m)} = \alpha^{(m)}\Big\},\\
A_\beta &= \Big\{m \in \{1,2,3,\dots,\min\{j,k\}\} : \alpha_{(m)} = \beta^{(m)}\Big\},\\
B_\beta &= \Big\{m \in \{1,2,3,\dots,k\} : \beta_{(m)} = \beta^{(m)}\Big\},\\
B_\alpha &= \Big\{m \in \{1,2,3,\dots,\min\{j,k\}\} : \beta_{(m)} = \alpha^{(m)}\Big\}
\end{aligned}$$

a součty

$$\alpha \bowtie \alpha = \sum_{i\in A_\alpha} 2^i,\quad \alpha \bowtie \beta = \sum_{i\in A_\beta} 2^i,\quad \beta \bowtie \beta = \sum_{i\in B_\beta} 2^i,\quad \beta \bowtie \alpha = \sum_{i\in B_\alpha} 2^i.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Tvrzení 1: V pravděpodobnostním prostoru náhodného pokusu $\delta_{\alpha-\beta}$ platí následující vztah

$$\frac{P(\dots\beta)}{P(\dots\alpha)} = \frac{\alpha \bowtie \alpha - \alpha \bowtie \beta}{\beta \bowtie \beta - \beta \bowtie \alpha},$$

který nazýváme Conwayův vzorec[1].

Poznámka 3: Z výše uvedeného vztahu plyne, že jestliže

$$\mu := \frac{\alpha \bowtie \alpha - \alpha \bowtie \beta}{\beta \bowtie \beta - \beta \bowtie \alpha},$$

pak

$$\mu > 1 \Leftrightarrow \beta \gg \alpha, \quad \mu = 1 \Leftrightarrow \alpha \approx \beta, \quad \mu < 1 \Leftrightarrow \alpha \gg \beta.$$

Příklad 7: Nechť $\alpha = rlrlrl$ a $\beta = rrlrlr$. Vidíme, že $\alpha_{(1)} = l \neq r = \alpha^{(1)}$, tedy $1 \notin A_\alpha$. Analogicky

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{rl}rlrl \\ rlrl\mathrm{rl} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 2 \in A_\alpha, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{rlr}lrl \\ rlr\mathrm{lrl} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 3 \notin A_\alpha, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{rlrl}rl \\ rl\mathrm{rlrl} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 4 \in A_\alpha,$$

$$\left.\begin{matrix} \mathrm{rlrlr}l \\ r\mathrm{lrlrl} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 5 \notin A_\alpha, \quad \left.\begin{matrix} \mathrm{rlrlrl} \\ \mathrm{rlrlrl} \end{matrix}\right\} \Rightarrow \ 6 \in A_\alpha.$$

Odtud

$$A_\alpha = \{2, 4, 6\},$$

a tedy

$$\alpha \bowtie \alpha = 2^2 + 2^4 + 2^6 = 84.$$

Obdobně dostaneme

$$A_\beta = \emptyset, \quad B_\beta = \{1, 6\}, \quad B_\alpha = \{1, 3, 5\},$$

což po dosazení dává

$$\alpha \bowtie \beta = 0, \qquad \beta \bowtie \beta = 66, \qquad \beta \bowtie \alpha = 42.$$

Z Conwayova vzorce plyne

$$\frac{\alpha \bowtie \alpha - \alpha \bowtie \beta}{\beta \bowtie \beta - \beta \bowtie \alpha} = \frac{84 - 0}{66 - 42} = \frac{21}{6}.$$

Protože

$$\frac{P(\dots\beta)}{P(\dots\alpha)} = \frac{21}{6} \quad \text{a} \quad P(\dots\beta) = 1 - P(\dots\alpha),$$

tak

$$P(\dots\alpha) = \frac{6}{27}, \quad P(\dots\beta) = \frac{21}{27}.$$

Odtud plyne, že $rrlrlr \gg rlrlrl$.

[1] tento vztah objevil John Horton Conway v [28];

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

5.3 Algoritmus střední doby bloudění po stochastickém grafu

Vraťme se k engelovské interpretaci průběhu Markovského řetězce $[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$ jako bloudění po stochastickém grafu tohoto řetězce. Nechť T_{w_j} označuje dobu bloudění, které začalo ve vrcholu w_j. Náhodná veličina T_{w_j} každému sledu z vrcholu w_j na okraj grafu přiřazuje jeho délku (počet hran sledu). Předpokládejme, že pro každý vrchol w_j existuje $E(T_{w_j})$, označme $E(T_{w_j}) = e_{w_j}$. Soustavu podmínek

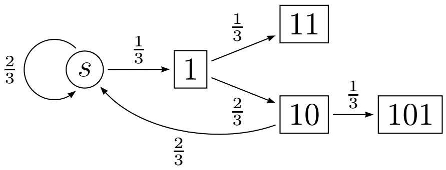
1) $e_{w_j} = 0 \quad \text{pro } w_j \in V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$,

2) $e_{w_j} = 1 + \sum\limits_{w_k} p_{jk} e_{w_k} \quad \text{pro } w_j \notin V[\mathcal{S}, \mathbf{Q}]$,

nazýváme algoritmem střední doby bloudění po stochastickém grafu s neprázdným okrajem (viz [24], str. 305–306).

Počet opakování náhodného pokusu $\delta_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ je náhodná veličina $T_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}, p_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n})$. Vypočítat střední hodnotu náhodné veličiny $T_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ přímo z definice je velmi obtížné. Doba bloudění po stochastickém grafu čekání $\delta_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ se měří počtem opakování náhodného pokusu. K určení střední hodnoty náhodné veličiny $T_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ stačí určit střední dobu bloudění po stochastickém grafu čekání $\delta_{\alpha_1-\ldots-\alpha_k}^{u_1-\ldots-u_n}$ pomocí výše uvedeného algoritmu.

Příklad 8: Uvažujme čekání $\delta_{11-101}^{\frac{1}{3}}$ a jeho stochastický graf z obr. 11.



Obr. 11 Stochastický graf pokusu $\delta_{11-101}^{\frac{1}{3}}$

S využitím algoritmu střední doby bloudění po stochastické grafu dostaneme soustavu rovnic

$$
\begin{aligned}
e_{w_0} &= 1 + \tfrac{2}{3} e_{w_0} + \tfrac{1}{3} e_1, \\
e_1 &= 1 + \tfrac{1}{3} e_{11} + \tfrac{2}{3} e_{10}, \\
e_{10} &= 1 + \tfrac{2}{3} e_{w_0} + \tfrac{1}{3} e_{101}, \\
e_{11} &= 0, \\
e_{101} &= 0,
\end{aligned}
$$

a po vyřešení dostáváme $e_{w_0} = E(T_{11-101}^{\frac{1}{3}}) = 8,4$.

Příklad 9: Nechť $\alpha_1 = 0101$, $\alpha_2 = 1010$, $u = \frac{1}{2}$. Uvědomte si, že

$$E(T_{0101}^{\frac{1}{2}}) = E(T_{1010}^{\frac{1}{2}}) = 20 \neq 15 = E(T_{0101-1010}^{\frac{1}{2}}).$$

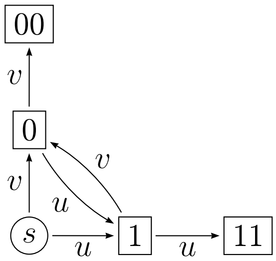
Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

6 Vlastnosti sérií rubů a líců

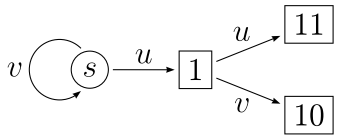
6.1 Pravděpodobnost získání dané série úspěchů a neúspěchů

V tomto odstavci ukážeme některé specifické metody výpočtu pravděpodobnosti jevů $P(\dots\alpha_1)$ a $P(\dots\alpha_2)$.

Příklad 10: Vezměme série $\alpha_1 = 00$ a $\alpha_2 = 11$. Obr. 12 představuje stochastický graf náhodného pokusu δ^u_{00-11}.



Obr. 12 Stochastický graf náhodného pokusu δ^u_{00-11}



Obr. 13 Stochastický graf náhodného pokusu δ^u_{11-10}

Nechť $P(\dots 11) = x$. V pravděpodobnostním prostoru indukovaném stochastickým grafem z obr. 12 máme

$$\begin{aligned} x = {} & u^2 + u^2 \cdot vu + u^2 \cdot (vu)^2 + u^2 \cdot (vu)^3 + \dots \\ & + vu^2 + vu^2 \cdot vu + vu^2 \cdot (vu)^2 + vu^2 \cdot (vu)^3 + \dots, \end{aligned}$$

a proto

$$\begin{aligned} x &= u^2 + vu^2 + vu \cdot \Big[u^2 + u^2 \cdot vu + u^2 \cdot (vu)^2 + u^2 \cdot (vu)^3 + \dots \\ &\quad + vu^2 + vu^2 \cdot vu + vu^2 \cdot (vu)^2 + vu^2 \cdot (vu)^3 + \dots \Big] = \\ &= u^2 + vu^2 + vu \cdot x. \end{aligned}$$

Odtud dostaneme, že

$$x = \frac{u^2 + vu^2}{1 - vu} = \frac{2u^2 - u^3}{1 - u + u^2},$$

a tedy

$$P(\dots 11) = \frac{2u^2 - u^3}{1 - u + u^2}.$$

Jevy $\{\dots 00\}$, $\{\dots 11\}$ jsou opačné, což znamená, že

$$P(\dots 00) = 1 - P(\dots 11) = \frac{u^3 - u^2 - u + 1}{1 - u + u^2}.$$

Příklad 11: Uvažujme série $\alpha_1 = 11$ a $\alpha_2 = 10$. Graf náhodného pokusu δ^u_{11-10} představuje obr. 13 na str. 34. Náhodný pokus δ^u_{11-10} začíná čekáním na první úspěch (viz

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[24], str. 246). Součet všech ohodnocení přechodů z vrcholu w_0 do vrcholu $\boxed{1}$ je rovna 1 (součet všech členů geometrické posloupnosti, kde $a_1 = u$ a $q = v = 1 - u$). Získáme-li úspěch, náhodný pokus skončí po následující etapě a platí

$$P(\ldots 11) = u \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 10) = v = 1 - u.$$

Stejnou argumentaci lze použít i na série 111 a 110, které vzniknou ze sérií 11 a 10 dopsáním 1 na začátek série.

Příklad 12: Uvažujme série $\alpha_1 = 111$, $\alpha_2 = 110$ a náhodný pokus $\delta^u_{111-110}$. O tom, kterou ze sérií se čekání $\delta^u_{111-110}$ skončí, rozhoduje výsledek etapy, který následuje bezprostředně po získání dvou úspěchů v řadě. Získáme-li úspěch, čekání končí sérií 111, v opačném případě končí čekání sérií 110. Odtud plyne, že

$$P(\ldots 111) = u \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 110) = v = 1 - u.$$

Výše uvedené argumenty lze užít i na série délky k ($k \in \mathbb{N}_4$), které vzniknou ze sérií 11 a 10 dopsáním $(k-2)$ jedniček na začátek série.

Příklad 13: Označme $\alpha_1 = 1_k$ sérii, jejíž každý člen je roven 1 a $\alpha_2 = 1_{k-1}0$ označuje sérii, jejíž počátek je tvořen z $(k-1)$ jedniček a poslední člen je 0. Uvažujme náhodný pokus $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$. O tom, jakou sérií se čekání skončí, rozhoduje výsledek etapy vykonané bezprostředně po získání $(k-1)$ úspěchů v řadě. Pokud tato etapa skončí úspěchem, pak dostaneme sérii 1_k, skončí-li neúspěchem, pak náhodný pokus $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$ skončí sérií $1_{k-1}0$. Odtud plyne, že

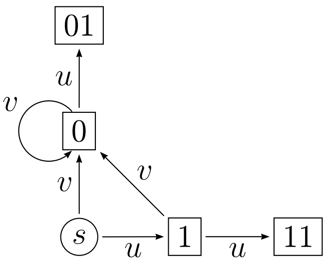
$$P(\ldots 1_k) = u \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 1_{k-1}0) = v = 1 - u.$$

Tuto argumentaci můžeme použít i na duální série.

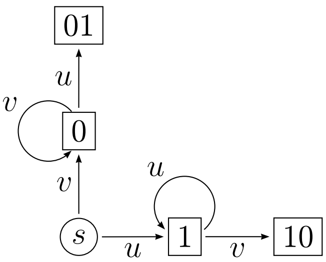
Příklad 14: Uvažujme série $\alpha_1 = 0_k$ a $\alpha_2 = 0_{k-1}1$. Série 0_k a 1_k jsou duální a také série $0_{k-1}1$ a $1_{k-1}0$ jsou duální, a proto ze symetrie (analogicky jako v případě náhodného pokusu $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, kdy $\alpha_1 = 1_k$ a $\alpha_2 = 1_{k-1}0$) dostaneme, že

$$P(\ldots 0_k) = v = 1 - u \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 0_{k-1}1) = u.$$

Příklad 15: Uvažujme série $\alpha_1 = 11$ a $\alpha_2 = 01$. Stochastický graf náhodného pokusu δ^u_{11-01} představuje obr. 14.



Obr. 14 Stochastický graf náhodného pokusu δ^u_{11-01}



Obr. 15 Stochastický graf náhodného pokusuδ^u_{10-01}

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Pokud jsme ve stavu $\boxed{0}$, pak s pravděpodobností 1 skončí náhodný pokus δ^u_{11-01} získáním série 01, neboť další krok čekání je čekání na úspěch. Pravděpodobnost dosažení vrcholu $\boxed{0}$ je rovna $v + uv = v(1+u) = 1 - u^2$, a proto

$$P(\ldots 01) = 1 - u^2 \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 11) = 1 - P(\ldots 01) = u^2.$$

Výše uvedené argumenty lze užít i na série 111 a 011, které vzniknou ze sérií 11 a 01 dopsáním cifry 1 na konec série.

Příklad 16: Uvažme série $\alpha_1 = 111$, $\alpha_2 = 011$ a náhodný pokus $\delta^u_{111-011}$. Jestliže se neúspěch objeví poprvé nejpozději ve třetí etapě, pak získat sérii 111 již není možné. Náhodný pokus $\delta^u_{111-011}$ skončí získáním série 111 tehdy a jen tehdy, když každá z prvních tří etap skončí úspěchem. Navíc

$$P(\ldots 111) = u^3,$$

a odtud plyne, že

$$P(\ldots 011) = 1 - u^3.$$

Výše uvedené argumenty lze užít i na série délky k ($k \in \mathbb{N}_4$), které vzniknou ze sérií 11 a 01 dopsáním $(k-2)$ jedniček na konec série.

Příklad 17: Uvažujme náhodný pokus $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$, kde $\alpha_1 = 1_k$ a $\alpha_2 = 01_{k-1}$. Jestliže neúspěch poprvé nastane nejpozději v $(k-1)$-ní etapě, pak získat sérii α_1 již není možné, neboť po $(k-1)$ úspěších náhodný pokus skončí sérií 01_{k-1}. Sérii 1_k získáme tehdy a jen tehdy, pokud k prvních etap skončí úspěchem. Z výše uvedených skutečností plyne, že

$$P(\ldots 1_k) = u^k \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 01_{k-1}) = 1 - u^k.$$

Tuto argumentaci můžeme použít i na duální série.

Příklad 18: Nechť $\alpha_1 = 0_k$ a $\alpha_2 = 10_{k-1}$. Série 0_k a 1_k jsou duální a také série 10_{k-1} a 01_{k-1} jsou duální, a proto ze symetrie plyne, že

$$P(\ldots 0_k) = v^k = (1-u)^k \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 10_{k-1}) = 1 - (1-u)^k.$$

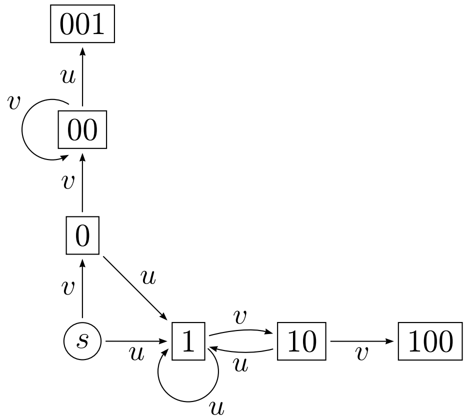
Příklad 19: Uvažujme série $\alpha_1 = 10$ a $\alpha_2 = 01$. Graf náhodného pokusu δ^u_{10-01} je obr. 15. O tom, jakou sérií se skončí náhodný pokus δ^u_{10-01}, rozhoduje výsledek první etapy. Pokud první etapa skončí neúspěchem, pak další průběh náhodného pokusu je čekáním na první úspěch a s pravděpodobností 1 se náhodný pokus skončí získáním série 01. Analogicky, pokud první etapa skončí úspěchem, pak s pravděpodobností 1 náhodný pokus skončí získáním série 10. A navíc

$$P(\ldots 10) = u \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 01) = v = 1 - u.$$

Výše uvedené argumenty lze užít i na série 100 a 001, které vzniknou dopsáním 0 na konec série 10 a na začátek sérii 01.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Příklad 20: Uvažujme série $\alpha_1 = 100$, $\alpha_2 = 001$ a náhodný pokus $\delta^u_{100-001}$. Obr. 16 představuje stochastický graf náhodného pokusu $\delta_{100-001}$.



Obr. 16 Stochastický graf náhodného pokusu $\delta_{100-001}$

Jestliže jsme ve stavu $\boxed{1}$, pak jev $\{\ldots 001\}$ je nemožný. Naopak je-li čekání ve stavu $\boxed{00}$, pak jev $\{\ldots 001\}$ je jev jistý. Aby čekání skončilo sérií 100, musí úspěch nastat nejpozději ve druhém pokusu. Odtud plyne že náhodný pokus $\delta^u_{100-001}$ skončí sérií 001 tehdy a jen tehdy, když první dva pokusy skončí neúspěchem. Dále

$$P(\ldots 100) = u + vu = 2u - u^2 \qquad \text{a} \qquad P(\ldots 001) = v^2 = (1-u)^2.$$

Výše uvedené argumenty lze užít i na série, které vzniknou dopsáním $(k-2)$ nul na konec série 10 a na začátek série 01.

Příklad 21: Uvažujme série $\alpha_1 = 10_{k-1}$, $\alpha_2 = 0_{k-1}1$ a náhodný pokus $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$. Pokud kterákoli z $(k-1)$ počátečních etap skončí úspěchem, pak získání série α_2 už není možné, neboť po $(k-1)$ neúspěších skončí náhodný pokus získáním série α_1. Aby náhodný pokus $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2}$ skončil sérií α_2, musí každá z prvních $(k-1)$ etap skončit neúspěchem. V takovém případě (s pravděpodobností 1) náhodný pokus skončí sérií α_2. Z výše uvedených úvah plyne, že

$$\begin{aligned} P(\ldots 10_{k-1}) &= u + vu + v^2u + \ldots + v^{k-2}\cdot u = u\cdot\frac{1-v^{k-1}}{1-v} \\ &= 1 - v^{k-1} = 1-(1-u)^{k-1}, \\ P(\ldots 0_{k-1}1) &= v^{k-1} = (1-u)^{k-1}. \end{aligned}$$

6.2 Pravděpodobnost získání dané série úspěchů a neúspěchů jako funkce pravděpodobnosti úspěchu

Pro každý náhodný pokus $\delta^u_{\omega_1-\ldots-\omega_n}$ a pevné $j \in \{1,2,\ldots,n\}$ je $P(\ldots\omega_j)$ funkcí parametru u. Nechť

$$P(\ldots\omega_j) = f_{\ldots\omega_j}(u) \text{ pro } u\in(0,1).$$

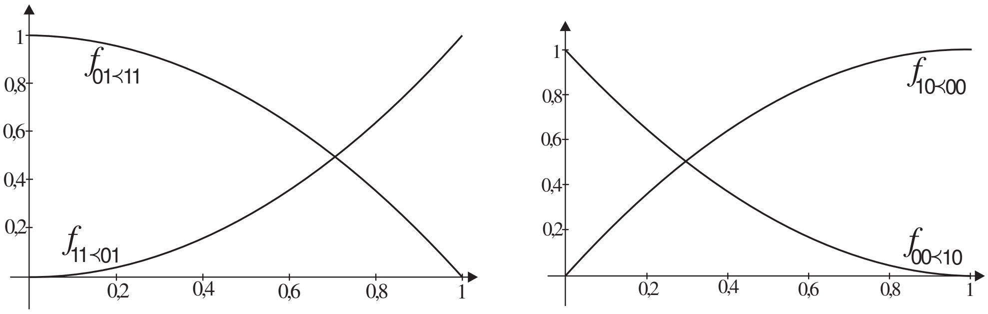
Analogicky v případě $n=2$, nechť

$$P(\ldots\omega_1) = f_{\omega_1\prec\omega_2}(u) \text{ pro } u\in(0,1).$$

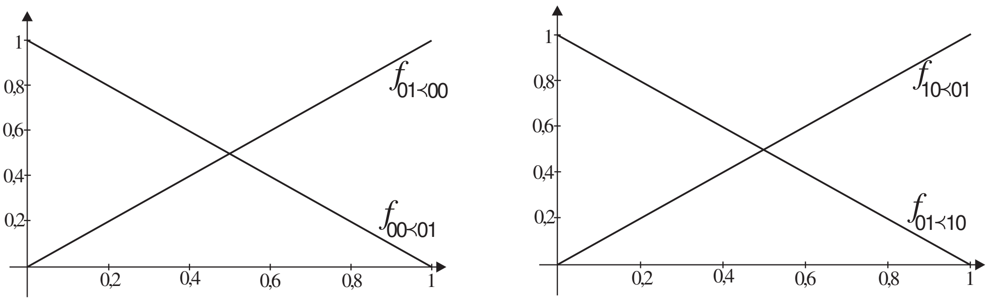
Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

6.2.1 Čekání na jednu ze dvou sérií úspěchů a neúspěchů délky 2

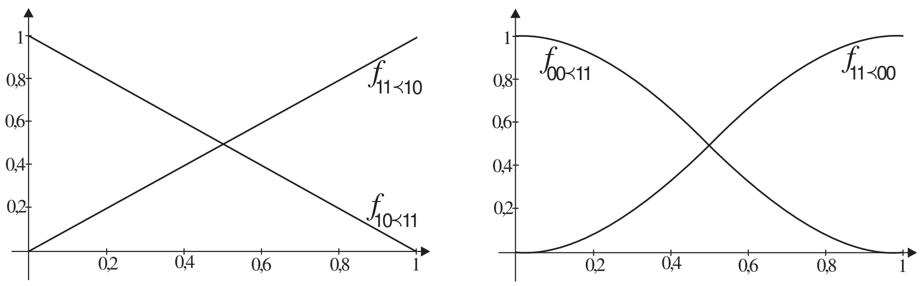
Je zřejmé, že
$$P(\ldots\omega_2) = 1 - f_{\omega_1 \prec \omega_2}(u).$$
Na obr. 17, 18 a 19 jsou grafy funkcí $f_{\omega_1 \prec \omega_2}$ pro série $\omega_1, \omega_2 \in \{11, 10, 01, 00\}$, kde $\omega_1 \neq \omega_2$.



Obr. 17



Obr. 18



Obr. 19

Z obr. 17 vidíme, že:
$(10 \gg 11)_u$ pro $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(11 \gg 10)_u$ pro $u \in (\frac{1}{2}, 1)$, $(10 \approx 11)_u$ pro $u = \frac{1}{2}$,
$(01 \gg 10)_u$ pro $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(10 \gg 01)_u$ pro $u \in (\frac{1}{2}, 1)$, $(01 \approx 10)_u$ pro $u = \frac{1}{2}$,
$(00 \gg 10)_u$ pro $u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$, $(10 \gg 00)_u$ pro $u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, 1)$, $(00 \approx 10)_u$ pro $u = \frac{2-\sqrt{2}}{2}$,
$(01 \gg 11)_u$ pro $u \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$, $(11 \gg 01)_u$ pro $u \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$, $(01 \approx 11)_u$ pro $u = \frac{\sqrt{2}}{2}$,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$(00 \gg 11)_u$ pro $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(11 \gg 00)_u$ pro $u \in (\frac{1}{2}, 1)$, $(11 \approx 00)_u$ pro $u = \frac{1}{2}$,
$(00 \gg 01)_u$ pro $u \in (0, \frac{1}{2})$, $(01 \gg 00)_u$ pro $u \in (\frac{1}{2}, 1)$, $(00 \approx 01)_u$ pro $u = \frac{1}{2}$.
Výše získané informace o sériích shrneme do tabulky:

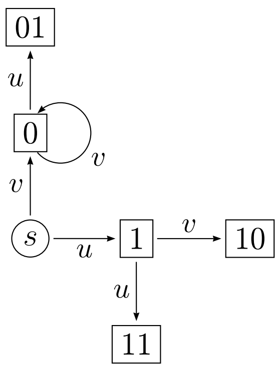
<table>
<tr><th>$u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2})$</th><th>$u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2})$</th><th>$u \in (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$</th><th>$u \in (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$</th></tr>
<tr><td colspan="2">$10 \gg 11$</td><td colspan="2">$11 \gg 10$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$01 \gg 10$</td><td colspan="2">$10 \gg 01$</td></tr>
<tr><td>$00 \gg 10$</td><td colspan="3">$10 \gg 00$</td></tr>
<tr><td colspan="3">$01 \gg 11$</td><td>$11 \gg 01$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$00 \gg 11$</td><td colspan="2">$11 \gg 00$</td></tr>
<tr><td colspan="2">$00 \gg 01$</td><td colspan="2">$01 \gg 00$</td></tr>
</table>

Z výsledků v tabulce plyne, že relace $\gg$ pro $u \in (0, \frac{2-\sqrt{2}}{2}) \cup (\frac{\sqrt{2}}{2}, 1)$ je relace tranzitivní, naopak pro $u \in (\frac{2-\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ není tranzitivní relací.

6.2.2 Čekání na jednu ze tří sérií úspěchů a neúspěchů délky 2

Nechť $\omega_1, \omega_2, \omega_3 \in \{0,1\}^2$ jsou čtyři náhodné pokusy typu $\delta^u_{\omega_1-\omega_2-\omega_3}$.

- Obrázek 20 představuje stochastický graf náhodného pokusu $\delta^u_{10-11-01}$.



Obr. 20

Z grafu může vyčíst, že

– pokud skončí první etapa neúspěchem, pak skončíme sérií 01;

– pokud skončí první etapa úspěchem a druhá neúspěchem, pak skončíme sérií 10;

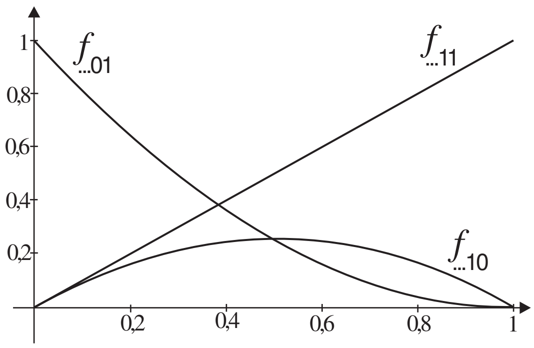
– pokud skončí první dvě etapy úspěchem, pak skončíme sérií 11.

Odtud plyne, že

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$P(\ldots 01) = v = 1 - u$, $P(\ldots 10) = uv = u(1-u)$ a $P(\ldots 11) = u^2$.

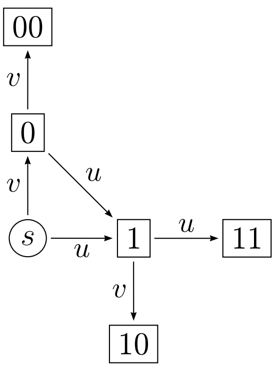
Grafy funkcí $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ a $f_{\ldots 11}$ najdeme na obr. 21.



Obr. 21

Platí:
$(01 \gg 10)_{(0,1)}$, $(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},1)}$,
$(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$.

- Stochastický graf náhodného pokusu $\delta^u_{10-11-00}$ představuje obr. 22.



Obr. 22

Pravděpodobnostní prostor tohoto náhodného pokusu je konečný, neboť $\Omega_{10-11-00} = \{00, 10, 11, 010, 011\}$ a

$p^u_{10-11-00}(00) = v^2 = (1-u)^2$,

$p^u_{10-11-00}(10) = uv = u(1-u)$,

$p^u_{10-11-00}(11) = u^2$,

$p^u_{10-11-00}(010) = uv^2 = u(1-u)^2$,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

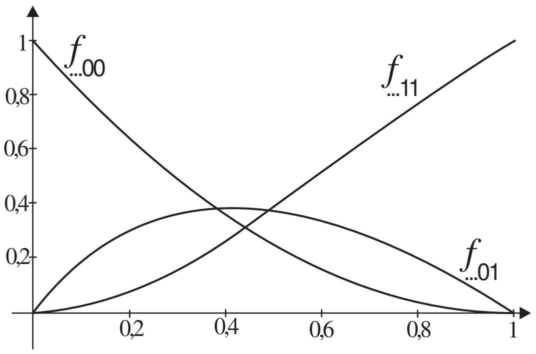
$p^u_{10-11-00}(011) = u^2v = u^2(1-u)$.

Protože $\{\dots 00\} = \{00\}$, $\{\dots 11\} = \{11, 011\}$ a $\{\dots 10\} = \{10, 010\}$, pak $P(\dots 00) = (1-u)^2$,

$P(\dots 10) = u(1-u) + u(1-u)^2 = u(1-u)(2-u)$,

$P(\dots 11) = u^2 + u^2(1-u) = u^2(2-u)$.

Grafy funkcí $f_{\dots 00}$, $f_{\dots 10}$ a $f_{\dots 11}$ jsou na obr. 23.



Obr. 23

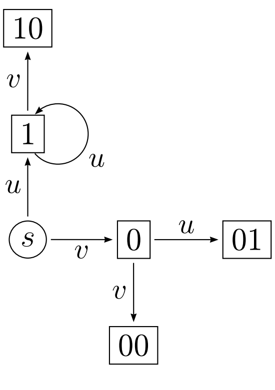
Odtud dostáváme, že:

$(01 \gg 00)_{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2},1)}$, $(00 \gg 01)_{(0,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$,

$(00 \gg 11)_{(0,u_0)}$, $(11 \gg 00)_{(u_0,1)}$, kde $u_0 = \dfrac{2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \doteq 0,445$,

$(11 \gg 01)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(01 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$.

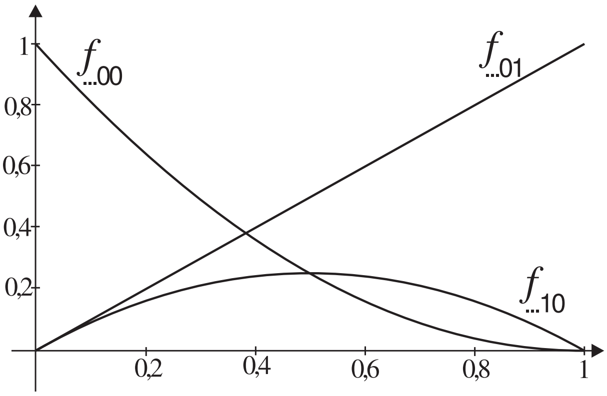
- Stochastický graf náhodného pokusu $\delta^u_{10-00-01}$ ukazuje obr. 24.



Obr. 24

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Z izomorfizmu stochastických grafů náhodných pokusů $\delta^u_{10-11-01}$ a $\delta^u_{10-00-01}$ plyne, že $P(\ldots 01) = u$, $P(\ldots 10) = u(1-u)$ a $P(\ldots 00) = (1-u)^2$. Grafy funkcí $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ a $f_{\ldots 00}$ představuje obr. 25.

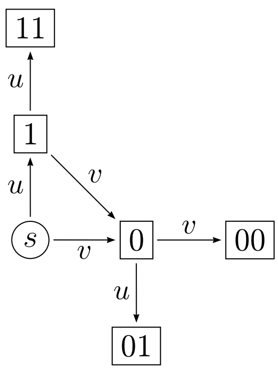


Obr. 25

Proto platí, že:

$(01 \gg 10)_{(0,1)}$, $(00 \gg 01)_{(0,\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{5}}{2})}$, $(00 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$.

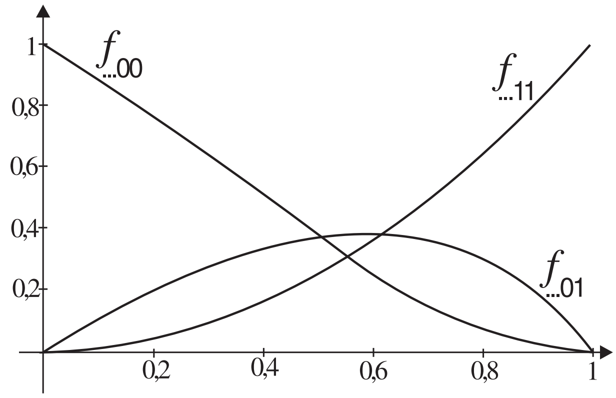
- Uvažujme náhodný pokus $\delta^u_{01-11-00}$. Stochastický graf tohoto náhodného pokusu je na obr. 26.



Obr. 26

Analogicky s využitím výše získaných výsledků dostaneme, že $P(\ldots 01) = u(1-u)(1+u)$, $P(\ldots 11) = u^2$ a $P(\ldots 00) = (1+u)(1-u)^2$. Grafy funkcí $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 11}$ a $f_{\ldots 00}$ jsou na obr. 27.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.



Obr. 27

Tedy

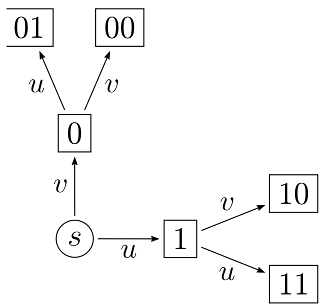
$(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$,

$(00 \gg 11)_{(0,u_0)}$, $(11 \gg 00)_{(u_0,1)}$, kde $u_0 = \frac{2}{3} - \dfrac{2\sqrt{7}\sin\left(\dfrac{\arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{9}\right)}{3}\right)}{3} \doteq 0,555$,

$(01 \gg 11)_{(0,\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2},1)}$.

6.2.3 Čekání na jednu ze čtyř sérií úspěchů a neúspěchů délky 2

Stochastický graf náhodného pokusu $\delta^u_{11-10-01-00}$ představuje obr. 28.



Obr. 28

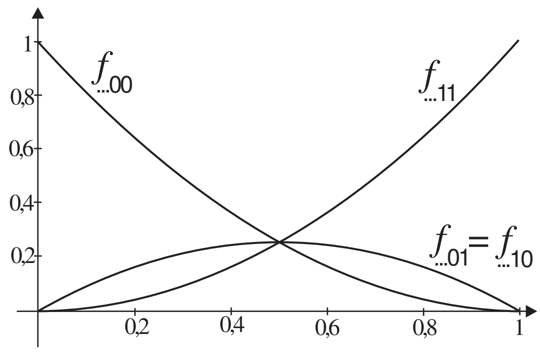
Pravděpodobnostní prostor $(\Omega_{11-10-01-00}, p^u_{11-10-01-00})$ je konečný. Máme $\Omega_{11-10-01-00} = \{11, 10, 01, 00\}$ a
$p^u_{11-10-01-00}(11) = u^2$,
$p^u_{11-10-01-00}(10) = u(1-u)$,
$p^u_{11-10-01-00}(01) = u(1-u)$,

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

$p^{u}_{11-10-01-00}(00) = (1-u)^2$.

V tomto konečném pravděpodobnostním prostoru je:
$P(\ldots 11) = u^2$,
$P(\ldots 10) = u(1-u)$,
$P(\ldots 01) = u(1-u)$,
$P(\ldots 00) = (1-u)^2$.

Grafy funkcí $f_{\ldots 00}$, $f_{\ldots 01}$, $f_{\ldots 10}$ a $f_{\ldots 11}$ ukazuje obr. 29.



Obr. 29

Pak
$(01 \approx 10)_{(0,1)}$, $(00 \gg 01)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(01 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(00 \gg 10)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(10 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(00 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 00)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(11 \gg 01)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(01 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$, $(11 \gg 10)_{(\frac{1}{2},1)}$, $(10 \gg 11)_{(0,\frac{1}{2})}$.

6.3 Paradoxní vlastnosti sérií rubů a líců, úspěch a neúspěchů

Nyní ukážeme příklady paradoxních vlastností sérií rubů a líců, sérií úspěchů a neúspěchů a sérií praporů.

Příklad 22: Uvažujme série úspěchů a neúspěchů: 10, 01 a 00. Platí

$$(10 \approx 01)_{\frac{1}{2}}, \quad (01 \approx 00)_{\frac{1}{2}}, \quad (10 \gg 00)_{\frac{1}{2}}.$$

Relace $\approx$ tedy není tranzitivní.

Příklad 23: Uvažujme série úspěchů a neúspěchů: 1101, 1011 a 0111. Pak

$$(1101 \gg 1011)_{\frac{1}{2}}, \quad (1011 \gg 0111)_{\frac{1}{2}}, \quad (0111 \gg 1101)_{\frac{1}{2}},$$

a proto mezi těmito třemi sériemi není nejlepší série (tj. lepší než každá ze dvou zbývajících). V čekání $\delta^2_{1101-1011-0111}$ je

$$0111 \gg 1011, \quad 1011 \gg 1101, \quad 0111 \gg 1101,$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

a to znamená, že v čekání $\delta^2_{1101-1011-0111}$ je série 0111 nejlepší (neboť je lepší než každá ze dvou zbývajících).

Příklad 24: Uvažujme náhodný pokus δ^u_{10-01}, kde $u \in (0,1)$ je parametr. V modelu čekání δ^u_{10-01} např.: pro $u = \frac{2}{3}$ a $u = \frac{3}{4}$ je $(10 \gg 01)_u$, a např.: pro $u = \frac{1}{3}$ a $u = \frac{1}{4}$ je $(01 \gg 10)_u$. Zdá se, že pro každé dvě série úspěchů a neúspěchů α_1, α_2, resp. pro náhodný pokus $\delta^u_{\alpha_1-\alpha_2-\ldots-\alpha_n}$, kde $n \geq 2$, existuje parametr resp. parametry, aby jedna série byla lepší než druhá. Uvažujme náhodný pokus $\delta^u_{00-01-10}$, kde $u \in (0,1)$ je parametr. Platí

$$\forall\ u \in (0,1) \quad \left[(01 \gg 10)^{00-01-10}_u\right].$$

V tomto čekání je ale série 01 vždy lepší než série 10.

Příklad 25: Nechť $\alpha_1 = 2221$, $\alpha_2 = 2112$, $\alpha_3 = 1122$, $u_1 = 0,3255$, $u_2 = 0,335$, $u_3 = 0,3395$. V modelu čekání $\delta^{u_1-u_2-u_3}_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ platí

$$2221 \gg 2112, \quad 2112 \gg 1122, \quad 2221 \gg 1122.$$

Zatímco v modelu čekání $\delta^{u_1-u_2-u_3}_{\alpha_1-\alpha_3}$ je

$$1122 \gg 2221.$$

Příklad 26: Nechť $\alpha_1 = 1221$, $\alpha_2 = 2212$, $\alpha_3 = 1311$, $u_1 = 0,3255$, $u_2 = 0,335$, $u_3 = 0,3395$. Pak je

$$(1221 \gg 2212)_{(u_1,u_2,u_3)}, \quad (2212 \gg 1311)_{(u_1,u_2,u_3)}, \quad (1221 \gg 1311)_{(u_1,u_2,u_3)},$$

zatímco v modelu čekání $\delta^{u_1-u_2-u_3}_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ platí

$$1311 \gg 1221, \quad 1221 \gg 2212, \quad 1311 \gg 2212.$$

Příklad 27: Nechť $\alpha_1 = 2312$, $\alpha_2 = 3122$, $\alpha_3 = 2232$, $u_1 = u_2 = u_3 = \frac{1}{3}$. Dostáváme

$$(2312 \gg 3122)_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})}, \quad (3122 \gg 2232)_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})}, \quad (2312 \approx 2232)_{(\frac{1}{3},\frac{1}{3},\frac{1}{3})},$$

zatímco v modelu čekání $\delta^3_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ platí

$$2312 \gg 2232, \quad 2232 \gg 3122, \quad 2312 \gg 3122.$$

Příklad 28: Nechť $\alpha_1 = 123$, $\alpha_2 = 231$, $\alpha_3 = 312$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{4}$. Pak

$$(123 \gg 231)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})}, \quad (231 \gg 312)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})}, \quad (312 \gg 123)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})},$$

zatímco v modelu čekání $\delta^4_{\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3}$ platí

$$123 \approx 231, \quad 231 \approx 312, \quad 312 \approx 123.$$

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Příklad 29: Nechť $\alpha_1 = 0111$, $\alpha_2 = 1110$. Pak

$$(0111 \Diamond 1110)_{\frac{1}{2}},$$

ale v čekání $\delta^2_{0111-1110}$ je

$$0111 \gg 1110.$$

Příklad 30: Nechť $\alpha_1 = 1111$, $\alpha_2 = 1110$. V tomto případě je

$$(1110 \lhd 1111)_{\frac{1}{2}},$$

zatímco v čekání $\delta^2_{1111-1110}$ platí

$$1110 \approx 1111.$$

Příklad 31: Nechť $\alpha_1 = 3421$, $\alpha_2 = 2342$, $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = \frac{1}{4}$. Platí

$$(3421 \lhd 2342)_{(\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4},\frac{1}{4})},$$

ale v čekání $\delta^4_{3421-2342}$ platí

$$2342 \gg 3421.$$

7 Stochastické hry

7.1 Náhodné hry

Ve hře hrají hráči $H_1, H_2, H_3, \ldots, H_m$. Provádí se náhodný pokus δ. Předpokládejme, že jevy $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_m$ jsou spojeny s náhodným pokusem δ a tvoří úplný rozklad v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_\delta, p_\delta)$, který je stochastickým modelem náhodného pokusu δ. Jestliže nastane jev A_j, tak zvítězí hráč H_j $(j = 1, 2, \ldots, m)$. Takovou hru nazýváme náhodnou hrou s účastí m hráčů. Řekneme, že hra je spravedlivá, pokud

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \cdots = P(A_m) = \frac{1}{m}.$$

V Journal of Recreational Mathematics (vol. 7, No. 4, Fall, 1974) Walter Penney uvažoval následující hru (uvedeme překlad z originálu):

„Jestliže házíme třikrát po sobě mincí, dostaneme jeden z následujících výsledků: HHH, HHT, HTH, HTT, THH, THT, TTH, TTT. Zdá se ale, že by vybraná nekonečná série měla stejnou šanci jako libovolná jiná série. Tuto skutečnost můžeme ilustrovat na příkladě následující hry: ty i tvůj soupeř si každý vyberete jednu sérii. Pak se hod mincí opakuje tak dlouho, až poslední tři hody vytvoří jednu ze dvou vybraných sérií. Zvítězí ten hráč, jehož série padla. Tvůj soupeř vybral sérii HHH, ty jsi vybral HTH. Jsi přesvědčený, že máš větší šance. Jak velká je tvoje šance?

Řešení autora: Odpověď zní: tvoje šance je 3 ku 2. Označme tvoje šance P. Jestliže

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

v prvním hodu padne H, pak máme čtyři stejně pravděpodobné případy (jako výsledky následujících dvou hodů mincí):
- HH (a v tom případě prohráváš)
- TH (a v tom případě vyhráváš)
- TT (a v tom případě musíte oba čekat než znovu padne H; odtud plyne, že tvoje šance zvítězit je znova P) a
- HT. V tomto případě záleží na tom jestli v následujícím hodu padne H nebo T (obojí je stejně možné). Ty zvítězíš nebo zvítězíš s pravděpodobností P. Spočítejme tvoje šance:

$$P = 0_{HH} + \frac{1}{4}_{TH} + \frac{P}{4}_{TT} + \frac{1}{8}_{HTH} + \frac{P}{8}_{HTT},$$

tedy $P = \frac{3}{5}$.

7.2 Strategicky-náhodná hra

Uvažujme následující modifikaci Penneyovy hry: Na začátku hry si hráč může vybrat sérii. Hráč H_A si vybírá první a zvolí sérii α. Pak si vybírá sérii hráč H_B (už ale ví, jakou sérii si vybral hráč H_A) a vybere sérii $\beta \in \{l, r\}^k \setminus \alpha$. Každý z hráčů se snaží vybrat takovou sérii, která mu dává největší šance zvítězit. Nyní se budeme zabývat optimálními strategiemi výběru každého z hráčů. Budeme řešit hry, ve kterých hráči vybírají série délky k, kde $k \geq 3$.

Definice 41: Pokud v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha-\beta}, p_{\alpha-\beta})$ platí,

$$P(\alpha \prec \beta) > P(\beta \prec \alpha),$$

řekneme, že je série α lepší než série β i označujeme $\alpha \gg \beta$.

Definice 42: Nechť α je pevně zvolená série rubů a líců a nechť $|\alpha| = k$, $k \geq 3$. Uvažujme množinu $\mathcal{A}_\alpha = \{\beta : |\beta| = k \wedge \alpha \neq \beta\}$. Sérii γ splňující podmínku

$$\forall_{\beta \in \mathcal{A}_\alpha} P_{\alpha-\gamma}(\ldots\gamma) \geq P_{\alpha-\beta}(\ldots\beta),$$

nazýváme kontra-optimální sérií k sérii α.

Všechny série rubů a líců délky k jsou stejně pravděpodobnými výsledky k-násobného hodu mincí. Proto by se mohlo zdát, že je Penneyova hra spravedlivá a nezáleží na tom jaké dvě série si hráči vyberou. V kapitole 1 jsme ukázali, že tato úvaha je chybná. Skutečnost, že v případě stejně dlouhých sérií není Penneyova hra spravedlivá lze považovat za jeden z paradoxů počtu pravděpodobnosti. Dokonce ke každé sérii α délky $k \geq 3$ vybrané hráčem H_A, může hráč H_B zvolit ze zbývajících sérií takovou, která je lepší než série α (viz [10], str. 187). Na začátku hry stojí hráč H_B před problémem výběru takové série β, která mu dává větší šance zvítězit než dává série α jeho soupeři. Je to problém jak najít (k dané sérii α) takovou sérii β délky k, že v pravděpodobnostním prostoru $(\Omega_{\alpha-\beta}, p_{\alpha-\beta})$ bude pravděpodobnost jevu $\{\ldots\beta\}$ větší než pravděpodobnost jevu $\{\ldots\alpha\}$.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

Tvrzení 2: Jestliže $\alpha = a_1 a_2 \ldots a_k$ je série rubů a líců, pak všechny kontra-optimální série k sérii α mají tvar

$$\beta = \lambda a_1 a_2 \ldots a_{k-1},$$

pro vhodné $\lambda \in \{l, r\}$.

Předpokládejme, že $\alpha = a_1 a_2 ... a_k \in \{H, T\}^k$, $k \geq 3$. Označme

$$\alpha_H = H a_1 a_2 ... a_{k-1} \quad \text{a} \quad \alpha_T = T a_1 a_2 ... a_{k-1}.$$

Tvrzení 3: Pokud α je série rubů a líců, tak $\hat{\alpha} = \alpha_H$ nebo $\hat{\alpha} = \alpha_T$.

Toto tvrzení dokázali L. Guibas a A. M. Odlyzko (viz [10], str. 183–208).

Tvrzení 4: Pro každou sérii rubů a líců α je

$$P(\alpha_H \prec \alpha) \neq P(\alpha_T \prec \alpha).$$

Z výše uvedených tvrzení vyplývá, že ke každé sérii α existuje právě jedna kontra-optimální série. Je jí jedna ze série α_H nebo α_T. Nakonec (srv. [10], str. 183–208) dostaneme:

Tvrzení 5: Pro každou sérii rubů a líců α platí

$$P(\alpha \prec \hat{\alpha}) < P(\hat{\alpha} \prec \alpha),$$

čili kontra-optimální série k sérii α je série lepší než série α.

Bezprostředním důsledkem tvrzení 4 je

Tvrzení 6: Neexistuje $k \geq 3$ tak, aby relace $\gg$ byla na množině $\{H, T\}^k$ tranzitivní relací.

Důkaz: Nechť $\alpha \in \{H, T\}^k$, kde $k \geq 3$ je libovolná předem daná série rubů a líců. Označme $\hat{\alpha} = \alpha_1$, $\hat{\alpha_1} = \alpha_2$, $\hat{\alpha_2} = \alpha_3$ atd. Pak je zřejmé, že

$$\alpha_2 \gg \alpha_1 \quad \text{a} \quad \alpha_1 \gg \alpha.$$

Jestliže $\sim (\alpha_2 \gg \alpha)$, pak není relace $\gg$ tranzitivní. Pokud však $\alpha_2 \gg \alpha$, pak uvažujeme sérii α_3 a pak máme

$$\alpha_3 \gg \alpha_2, \qquad \alpha_2 \gg \alpha_1 \quad \text{a} \quad \alpha_1 \gg \alpha.$$

Jestliže $\sim (\alpha_3 \gg \alpha \vee \alpha_3 \gg \alpha_1)$, tak relace $\gg$ není tranzitivní.
Jestliže $\alpha_3 \gg \alpha$ a $\alpha_3 \gg \alpha_1$, pak uvažujeme série α_4 atd. Množina $\{H, T\}^k$ je konečná a proto výše uvedeným postupem dojdeme k závěru, že relace $\gg$ není tranzitivní.

Relace $\gg$ se objevuje ve stochastické hře, kterou řešil v roce 1974 Walter Penney (viz [22]). Ve hře hrají dva hráči H_A a H_B. Na začátku hry si hráči vybírají série z

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

množiny $\{H, T\}^k$, kde $k \geq 3$ je pevně daná délka série. Hráč H_A vybírá svoji sérii α jako první. Pak vybírá hráč H_B svoji sérii β z množiny $\beta \in \{H, T\}^k \setminus \alpha$. Hráč H_B ví, jakou sérii si vybral hráč H_A. Pak se provádí losování $\delta_{\alpha-\beta}$ a pokud nastane jev $\{\alpha \prec \beta\}$, tak zvítězí hráč H_A. Pokud nastane jev $\{\beta \prec \alpha\}$, tak vyhrává hráč H_B. Je jasné, že větší šance na výhru má ten z hráčů, jehož série je lepší. Paradoxem je, že hráč vybírá svou sérii jako druhý má - po správném výběru série - větší šance na výhru ve hře. Přednostní právo při výběru série tedy není výsadou.

Protože relace $\gg$ není tranzitivní, tak paradoxně ze skutečnosti, že hráč H_A má větší šance na výhru než hráč H_B a hráč H_B má větší šance na výhru než hráč H_C nevyplývá, že ve hře s hráči H_A a H_C má větší šance na výhru hráči H_A (bez ohledu na to, jakou délku série si hráči vyberou).

Reference

[1] Batanero a kol.: The nature of chance and probability, In G. Jones (Ed.), Exploring probability in school: challenges for teaching and learning, 15–37, Springer, New York 2004.

[2] Batanero a kol.: Training teachers to teach probability, Journal of Statistics Education, Volume 12, on line: www.amstat.org/publications/ise/.

[3] Bobrowski, D.: Probabilistyka w zastosowaniach technicznych, Wydawnictwa Naukowo – Techniczne, Warszawa 1986.

[4] Brémaud, P.: Markov chains, Gibbs fields, Monte Carlo simulation, and queues, Springer – Verlag, New York 1999.

[5] Csirik, J. A.: Optimal strategy for the first player in the Penney ante game, Combinatorics, Probability and Computing 1 (1992), 311–321.

[6] Engel, A.: Stochastik, Ernst Klett Verlag. Stuttgart 1990.

[7] Feller, W.: Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1977.

[8] Fischbein, E.: The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children, D.Reidel Publishing Company, Dordrecht 1975.

[9] Freudenthal, H.: Rola intuicji geometrycznych we współczesnej matematyce, Wiadomości Matematyczne DC (1966).

[10] Guibas, L. J., Odlyzko A. M.: String overlaps, pattern matching, and nontransitive games, Journal of Combinatorial Theory, 30 (1981), seria A, 183–208.

[11] Krech, I.: Probability in probability spaces connected with generalised Penney's games, Acta Univ. Purkynianae 42(1999), 71-77.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[12] Krech, I.: Waiting for series of colours and properties of some relations in a set of these series, Acta Univ. Purkynianae 72 Studia Mathematica (2001), 124-128.

[13] Krech, I.: Osobliwe własności modeli probabilistycznych czekania na serie sukcesow i porażek, Ann. Acad. Paed. Cracov. 5 Studia Ad Calculum Probabilistis Eiusque Didacticam Pertinentia 1(2002), 39-55.

[14] Krech, I.: Awaiting the series of colours - stochastic graph as the means of mathematical treatment and argumentation, Ann. Acad. Paed. Cracov. 16 Studia Mathematica III (2003), 119-124.

[15] Krech, I.: Rachunek prawdopodobieństwa i sumowanie szeregów, Matematyka 1 (2000), 19–24.

[16] Krech, I.: Stochastický graf jako hrací plátno k náhodné hře a jako prostředek matematické argumentace, Acta Universitatis Palackianae Olomucensis, Matematika 3, Olomouc 2008, 155-159.

[17] Krech, I., Tlustý, P.: Waiting Time for Series of Successes and Failures and Fairness of Random Games, Teaching Mathematics: innovation, new trends, research, Ružomberok 2009.

[18] Krech, I., Tlustý, P.: Stochastické grafy a jejich aplikace, Jihočeská univerzita, České Budějovice, 2012.

[19] Krygowska, Z.: Zarys dydaktyki matematyki, t.I., WSiP, Warszawa 1979.

[20] Ma, L., P.: Knowing and teaching elementary mathematics, Mahwah. NJ: Lawrence Erlbaum 1999.

[21] Nešetřil, J.: Teorie grafů, SNTL, Praha, 1979

[22] Penney, W.: Problem 95: Penney-Ante, Jurnal of Recreational Mathematics, 7 (1974), 321.

[23] Płocki, A.: Stochastyka dla nauczyciela, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2010.

[24] Płocki, A.: Stochastyka 1. Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna jako matematyka in statu nascendi, Wydawnictwo Naukowe WSP, Kraków 1997.

[25] Płocki, A.: Dydaktyka stochastyki, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock 2005.

[26] Płocki, A., Tlustý, P.: Pravděpodobnost a statistika pro začátečníky a mírně pokročilé, Praha, Prometheus, 2007.

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.

[27] Płocki, A., Tlustý, P.: Kombinatoryka wokól nas, Wydawnictwo Naukowe NOVUM, Płock, 2017, třetí vydání

[28] SHUO-YEN R. L.: A Martingale Approach to the Study of Occurrence of Sequence Patterns in Repeated Experiments, The Annals of Probabability, Volume 8, no. 6(1980), 1171-1176.

[29] Siwek, H.: Dydaktyka matematyki. Teoria i zastosowania w matematyce szkolnej, WSiP, Warszawa 2005.

[30] Tlustý, P., Krech, I.: Stochastické grafy jako nástroj řešení matematických úloh, Matematika-fyzika-informatika 5 (Ročník 19, Leden 2010), Olomouc 2010.

[31] Tlustý, P., Rost, M. Aplikacja łańcuchów Markowa do gier losowych, Annales Academiae Pedagogice Cracoviensis. Kraków, Wydawnictwo Naukowe Akademii Pedagogicznej, 2008, 177–180.

[32] Tlustý, P., Rost, M. Stochastic graphs and their applications, Mathematics XII., Częstochowa, Wydavnictwo Akademii im. J. Długosza, 2007, 435 – 440.

[33] Tversky, A., Kahneman, D.: Availability: A heuristic for judging frequency and probability, Cognitive Psychology 5 (1973).

[34] Tversky, A., Kahneman, D.: Judgments under uncertainty: Heuristics and Biases, Science 185 (1974).

[35] Walter, H.: Heuristische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen, Der Mathematikunterricht, Februar (1983).

Funded by the European Union. Views and opinions expressed are however those of the author(s) only and do not necessarily reflect those of the European Union or the European Education and Culture Executive Agency (EACEA). Neither the European Union nor EACEA can be held responsible for them.